

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra elektroenergetiky

**Detekce rezonančních kmitočtů a tvarových módů u komponentů
asynchronních motorů**

**Detection of resonance frequencies and mode shapes of induction
motor components**

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jan Polcer**
Studijní program: N2649 Elektrotechnika
Studijní obor: 3907T001 Elektroenergetika
Téma: **Detekce rezonančních kmitočtů a tvarových módů u komponentů
asynchronních motorů**
**Detection of resonance frequencies and mode shapes of induction motor
components**
Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Mechanické kmitání, tvarové módy a budící síly u asynchronních strojů a jejich součástí.
Výběr částí stroje pro modální analýzu.
Matematický model a analýza s využitím MKP.
Praktické provedení modální analýzy vybraných komponentů.
Souhrnné vyhodnocení.

Seznam doporučené odborné literatury:

BILOŠOVÁ, Alena. Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Modální zkoušky. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2012
GIERAS, Jacek F, Joseph Cho LAI a Chong WANG. Noise of polyphase electric motors. CRC Press, 2006
HELLER, Bedřich a Václav HAMATA. Přídavná pole, síly a ztráty v asynchronním stroji. Praha: Československá akademie věd, 1961.
KOŽEŠNÍK, Jaroslav. Mechanika elektrických strojů točivých. Nakladatelství ČSAV Praha, 1961
Další dle pokynů vedoucího a konzultanta diplomové práce


Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

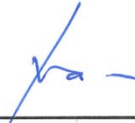
Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Bernat, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2018

Datum odevzdání: 30.04.2019




prof. Ing. Stanislav Rusek, CSc.
vedoucí katedry


prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne: 30. 4. 2019



.....
Podpis studenta

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu diplomové práce Ing. Petru Bernatovi Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce. Dále děkuji společnosti Siemens, s.r.o., odštěpný závod Elektromotory Mohelnice, zejména pak Ing. Petru Chrobákovi, Ing. Pavlu Valentovi a Ing. Pavlu Motáňovi za cenné rady a pomoc při realizaci měření. Velké poděkování patří také моým rodičům za podporu během celého studia.

Prohlášení zástupce spolupracující právnické nebo fyzické osoby

Souhlasím se zveřejněním této diplomové práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v magisterských programech VŠB-TU Ostrava.

V Mohelnici dne: 30. 4. 2019



Ing. Miloš PĚNIČKA
Podpis zástupce

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá problematikou rezonance a tvarových módů u asynchronních strojů. V teoretické části se práce zabývá nejprve obecným popisem problematiky kmitání a rezonance. Na tuto část navazuje kapitola týkající se rezonance konkrétně u asynchronních strojů. Jsou zde popsány možnosti analytického a numerického výpočtu vlastních kmitočtů statorového svazku asynchronního stroje. V další části práce pojednává o budících silách vznikajících v magnetickém obvodu asynchronního stroje při harmonickém napájení, kde nejdůležitější částí této kapitoly jsou vztahy pro výpočet frekvencí a řádů jednotlivých sil. V poslední kapitole teoretické části je rozebrána problematika experimentální modální analýzy se zaměřením na potřebné vybavení a zásady, které je nutno při měření dodržovat. Dále práce pokračuje praktickou částí, jejímž hlavním cílem bylo provedení experimentální modální analýzy několika statorových svazků s cílem zjistit vliv vinutí a impregnace na jednotlivé vlastní kmitočty. Na to navazuje modální analýza s využitím metody konečných prvků v programu Ansys Workbench. V závěru práce je provedeno vyhodnocení všech výsledků získaných pomocí měření, simulace a analytického výpočtu.

Klíčová slova

Asynchronní stroj; budící síly; modální analýza; rezonance; statorový svazek; tvarový mód; vlastní kmitočet

Abstract

This thesis deals with resonance and mode shapes of induction machines. The theoretical part of the thesis firstly deals with a general description of oscillation and resonance. Secondly, it describes resonance specifically in induction machines and contemplates the possibilities of analytical and numerical calculation of the natural frequencies of the stator stack of induction machine. The following part of the thesis deals with the description of the radial forces generated in the magnetic circuit of induction machine with sinusoidal supply voltage, where the most important part of the chapter are relations for calculating the frequencies and orders of individual forces. The last chapter of the theoretical part describes the problematics of experimental modal analysis focusing on the necessary equipment and principles, which must be followed during measurement. The theory is followed by the practical part, the main aim of which was an experimental modal analysis of several stator stacks in order to determine the effect of winding and impregnation on natural frequencies. This is followed by a modal analysis using the finite element method in Ansys Workbench software. All results obtained by measurement, simulation and analytical calculation are evaluated at the end of the thesis.

Key words

Excitation forces; induction machine; modal analysis; mode shape; natural frequency; resonance; stator stack

Obsah

Seznam obrázků	10
Seznam tabulek	12
Úvod.....	13
1. Obecný úvod do problematiky kmitání	14
1.1 Volné netlumené kmitání	14
1.2 Volné tlumené kmitání	15
1.3 Kmitání vynucené harmonickou budící silou.....	17
1.4 Rezonance	19
1.5 Tvarové módy	21
2. Kmitání v asynchronních strojích	22
2.1 Úvod.....	22
2.2 Tvarové módy satorového svazku asynchronního stroje	23
2.3 Analytický výpočet vlastních kmitočtů satoru asynchronního stroje.....	24
2.4 Výpočet vlastních kmitočtů pomocí metody konečných prvků	25
3. Budící síly v asynchronním stroji.....	27
3.1 Vlivy ovlivňující magnetické pole ve vzduchové mezeře.....	27
3.2 Modelování vlivu drážkování a statické excentricity na průběh magnetické indukce v programu Ansys Maxwell	29
3.3 Vznik radiálních magnetických sil	33
3.4 Frekvence a řady radiálních magnetických sil	35
4. Modální analýza	38
4.1 Možnosti uložení měřené struktury.....	39
4.2 Volba měřicích bodů	39
4.3 Buzení měřené struktury	40
4.4 Snímače pro měření odezvy	43
4.5 Měření	45
5. Praktické provedení modální analýzy	46
5.1 Popis zvoleného řešení	46
5.2 Geometrický model	47
5.3 Měření	47
5.4 Výsledné frekvenční odezvosvé funkce a vlastní kmitočty	50
5.5 Grafické znázornění zjištěných tvarových módů	54

6.	Analýza s využitím metody konečných prvků	56
6.1	Modální analýza s uvažováním izotropních materiálových vlastností.....	57
6.2	Modální analýza s uvažováním anizotropních materiálových vlastností	58
6.3	Grafické znázornění tvarových módů	59
6.4	Výsledky analytického výpočtu	64
6.5	Možnost provedení harmonické analýzy pomocí MKP	65
7.	Vyhodnocení výsledků.....	67
7.1	Zhodnocení výsledků měření	67
7.2	Zhodnocení výsledků simulace a analytického výpočtu	68
	Závěr	71
	Seznam použité literatury	72

Seznam obrázků

Obr. 1-1 – Model mechanické netlumené kmitající soustavy [2].....	14
Obr. 1-2 – Časový průběh výchylky při netlumeném volném kmitání [2].....	15
Obr. 1-3 – Model mechanické tlumené kmitající soustavy [2]	15
Obr. 1-4 – Časový průběh výchylky při podkriticky tlumeném kmitání [2].....	17
Obr. 1-5 – Model tlumené kmitající soustavy s harmonickou budicí silou [2].....	17
Obr. 1-6 – Odezva soustavy na harmonický průběh budicí síly [2]	18
Obr. 1-7 – Amplitudová frekvenční charakteristika [3]	20
Obr. 1-8 – Fázová frekvenční charakteristika [3]	20
Obr. 1-9 – Princip rozkladu na jednotlivé vlastní módy [5].....	21
Obr. 1-10 – Frekvenční charakteristiky slabě (vlevo) a silně (vpravo) vázaných módů [4]	21
Obr. 2-1 – Radiální vlastní módy statorového svazku [1]	23
Obr. 2-2 – Příklad modelu statorového svazku v programu Ansys [6]	26
Obr. 2-3 – Příklad tvarových módů v programu Ansys [6]	26
Obr. 3-1 – Fiktivní zvětšení otevření drážky vlivem saturace [6].....	27
Obr. 3-2 – Excentricita rotoru: (a) statická, (b) dynamická [7].....	28
Obr. 3-3 – Změna magnetické vodivosti vzduchové mezery při otáčení rotoru: a) maximální magnetická vodivost, b) minimální magnetická vodivost [9].....	29
Obr. 3-4 – Model asynchronního motoru.....	30
Obr. 3-5 – Detail tvaru drážek pro modely 1; 2 a 3	30
Obr. 3-6 – Detail tvaru drážek pro model 4 s excentricitou.....	30
Obr. 3-7 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 1	31
Obr. 3-8 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 2	31
Obr. 3-9 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 3	32
Obr. 3-10 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 4	32
Obr. 3-11 – Rozložení magnetických sil podél vzduchové mezery	33
Obr. 4-1 – Sestava měření při využití budiče vibrací [10]	38
Obr. 4-2 – Sestava měření při využití rázového kladívka [10]	38
Obr. 4-3 – Příklad geometrického modelu pro modální analýzu [11]	40
Obr. 4-4 – Vliv použitého hrotu na silový impuls a jeho spektrum [10].....	41
Obr. 4-5 – Druhy budících signálů [10].....	42
Obr. 4-6 – Možnosti připojení budiče k měřené struktuře [10].....	42
Obr. 4-7 – Snímač zrychlení [12]	43
Obr. 4-8 – Měření při buzení struktury budičem [10]	45
Obr. 4-9 – Měření při buzení struktury rázovým kladívkem [10]	45
Obr. 5-1 – Statorové svazky.....	46
Obr. 5-2 – Geometrický model svazku v programu μ -Remus.....	47
Obr. 5-3 – Zařízení použité pro měření [13], [14].....	48
Obr. 5-4 – Sestava měření	49
Obr. 5-5 – Příklad FRF v bodě 2 ve směru osy x pro překládaný holý svazek	49
Obr. 5-6 – Výsledná FRF složená ze všech bodů pro holý nepřekládaný svazek.....	50

Obr. 5-7 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro holý překládaný svazek	50
Obr. 5-8 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek bez impregnace	51
Obr. 5-9 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek jednou impregnovaný.....	51
Obr. 5-10 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek dvakrát impregnovaný	52
Obr. 5-11 – Srovnání výsledných FRF	53
Obr. 5-12 – Tvarové módy řádu $m = 2,0$ (vlevo) a $m = 2,1$ (vpravo)	54
Obr. 5-13 - Tvarové módy řádu $m = 3,0$ (vlevo) a $m = 3,1$ (vpravo)	54
Obr. 5-14 - Tvarové módy řádu $m = 4,0$ (vlevo) a $m = 4,1$ (vpravo)	55
Obr. 5-15 - Tvarové módy řádu $m = 5,0$ (vlevo) a $m = 5,1$ (vpravo)	55
Obr. 6-1- Zjednodušené modely statorových svazků v programu Solidworks.....	56
Obr. 6-2 – Schéma projektu v programu Ansys Workbench	56
Obr. 6-3 – Modely s vytvořenou sítí	57
Obr. 6-4 – Tvarový mód řádu $m = 2,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek	60
Obr. 6-5 - Tvarový mód řádu $m = 2,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	60
Obr. 6-6 – Tvarový mód řádu $m = 3,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek	61
Obr. 6-7 - Tvarový mód řádu $m = 3,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	61
Obr. 6-8 - Tvarový mód řádu $m = 4,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	62
Obr. 6-9 - Tvarový mód řádu $m = 4,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	62
Obr. 6-10 - Tvarový mód řádu $m = 5,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	63
Obr. 6-11 - Tvarový mód řádu $m = 5,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	63
Obr. 6-12 - Tvarový mód řádu $m = 0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek.....	64
Obr. 6-13 – Vytvoření radiálního tlaku s řádem $r = 2$	65
Obr. 6-14 – Odezva svazku na budící sílu s řádem $r = 2$	66

Seznam tabulek

Tab. 5-1 – <i>Změřené vlastní kmitočty</i>	52
Tab. 6-1 – <i>Materiálové vlastnosti [6]</i>	57
Tab. 6-2 – <i>Výsledné vlastní kmitočty s uvažováním izotropních materiálových vlastností</i>	58
Tab. 6-3 – <i>Materiálové vlastnosti vinutí [6]</i>	58
Tab. 6-4 – <i>Materiálové vlastnosti statorového jádra</i>	59
Tab. 6-5 – <i>Výsledné vlastní kmitočty s uvažováním anizotropních materiálových vlastností</i>	59
Tab. 6-6 – <i>Výsledky analytického výpočtu</i>	64
Tab. 6-7 – <i>Definování radiálního tlaku řádu $r = 2$</i>	66
Tab. 7-1 – <i>Srovnání získaných výsledků</i>	70

Úvod

Asynchronní motory v současnosti patří k nejčastěji používaným točivým strojům. Jedním z důvodů, proč se problematika rezonance v asynchronních strojích dostává do popředí, je v dnešní době jejich časté provozování s proměnnými otáčkami ve spojení s frekvenčními měniči. Za splnění určitých podmínek vzniká velmi nežádoucí jev zvaný rezonance, při které je stroj vystaven nebezpečně velkým vibracím. Tomuto jevu je nutno se při provozu stroje vyhnout. K tomu je nutno znát dynamické vlastnosti stroje a frekvence jednotlivých sil, které ve stroji při jeho chodu vznikají. [1]

V první kapitole diplomové práce se nachází pro vysvětlení základních principů a uvedení do problematiky popis mechanického kmitání v soustavách s jedním stupněm volnosti, na což navazuje popis mechanické rezonance v těchto soustavách. Zejména jsou zde uvedeny podmínky vzniku a projevy rezonance.

Druhá kapitola vysvětluje problematiku kmitání a tvarových módů konkrétně u asynchronních strojů. Nacházejí se zde rovněž vztahy pro analytický výpočet vlastních kmitočtů radiálních tvarových módů satorového svazku.

Ve třetí kapitole jsou charakterizovány jednotlivé budící síly vznikající při chodu asynchronního motoru. Kapitola je zaměřená na radiální síly vznikající v magnetickém obvodu. Nejprve je zde vysvětlen základní princip vzniku magnetických budících sil. Dále jsou zde rozebrány vztahy pro výpočet frekvencí a řádů jednotlivých budících sil. V rámci této kapitoly bylo provedeno několik simulací v programu Ansys Maxwell s cílem zjistit, jak se změní rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery při různých konfiguracích satorových a rotorových drážek.

Čtvrtá kapitola se zaměřuje na modální analýzu prováděnou pomocí měření. Kapitola poukazuje na vybavení potřebné pro modální analýzu a dále zásady, které je nutno při měření dodržet.

Praktická část práce je směřována nejprve k popisu provedeného měření a dále na srovnání získaných výsledků ve formě frekvenčních odezvových funkcí. Měření bylo prováděno celkem na 5 satorových svazcích, kde hlavním cílem práce bylo zjištění vlivu dvojité impregnace vinutí na jednotlivé vlastní kmitočty.

V další části je popsáno, jakým způsobem byla realizována modální analýza pomocí metody konečných prvků v programu Ansys Workbench. Tato analýza byla provedena jak pro svazek bez vinutí, tak pro svazek s vinutím. Nejprve bylo uvažováno s izotropními materiálovými vlastnostmi. V další fázi byly použity anizotropní vlastnosti s cílem nalezení numerického modelu satorového svazku.

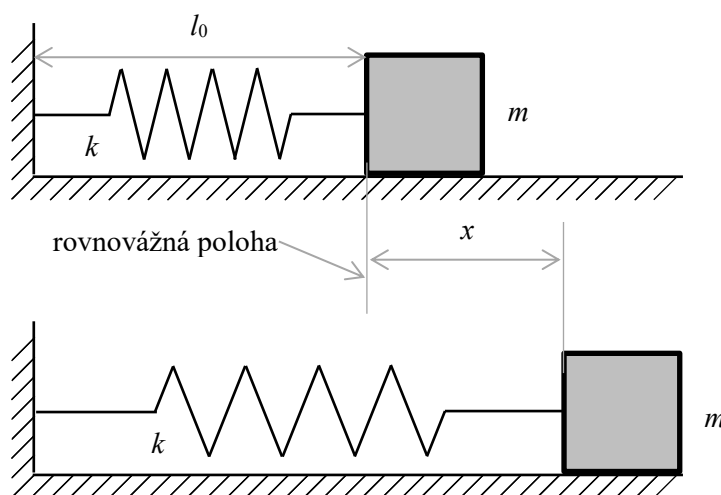
V závěrečné kapitole je provedeno zhodnocení všech výsledků získaných pomocí měření, simulace metodou konečných prvků a pomocí analytického výpočtu provedeného na základě vztahů uvedených ve druhé kapitole.

1. Obecný úvod do problematiky kmitání

Pod pojmem mechanické kmitání se obecně rozumí pravidelný pohyb tělesa kolem rovnovážné polohy. Kmitání může být podle vzniku volné a buzené. Podle tlumení jej dělíme na tlumené a netlumené. Podle chování prvků v systému se dělí na lineární a nelineární. Základní druhy lineárního kmitání budou dále rozebrány v následujících podkapitolách. [2]

1.1 Volné netlumené kmitání

Model netlumeného volného kmitání je znázorněn na Obr. 1-1. Těleso je připevněno k pevnému rámu pružinou s tuhostí k . Těleso se po podložce pohybuje bez tření a odpor prostředí se zanedbává. Pokud dojde k vychýlení tělesa z rovnovážné polohy, začne soustava kmitat. [2]



Obr. 1-1 – Model mechanické netlumené kmitající soustavy [2]

kde: m – hmotnost tělesa (kg); k – tuhost pružiny (N/m); l_0 – délka nezatížené pružiny (m); x – prodloužení pružiny (m)

Pro vlastní úhlový kmitočet Ω_0 (s^{-1}) znázorněné mechanické soustavy platí:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-1)$$

Pro vlastní kmitočet f_0 (Hz) pak platí:

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi} \quad (1-2)$$

Tomu pak odpovídá perioda T_0 (s):

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (1-3)$$

Pokud se těleso posune po podložce, začne pružina vytvářet tzv. směrovou sílu F_k (N):

$$F_k = k \cdot x \quad (1-4)$$

Pro soustavu lze psát pohybovou rovnici:

$$m \cdot a + k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \quad (1-5)$$

Řešením této diferenciální rovnice je časový průběh výchylky:

$$x(t) = C \cdot \sin(\Omega_0 \cdot t + \Phi_0) \quad (1-6)$$

kde: C – maximální výchylka (m); Φ_0 – fázový posuv (rad)

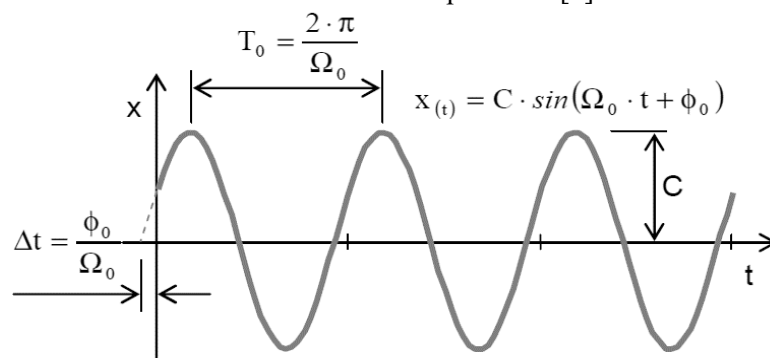
C a Φ_0 se určí z počátečních podmínek:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}} \quad (1-7)$$

$$\Phi_0 = \arctan \frac{\Omega_0 \cdot x_0}{v_0} \quad (1-8)$$

kde: x_0 – počáteční výchylka (m); v_0 – počáteční rychlost (m/s) [2]

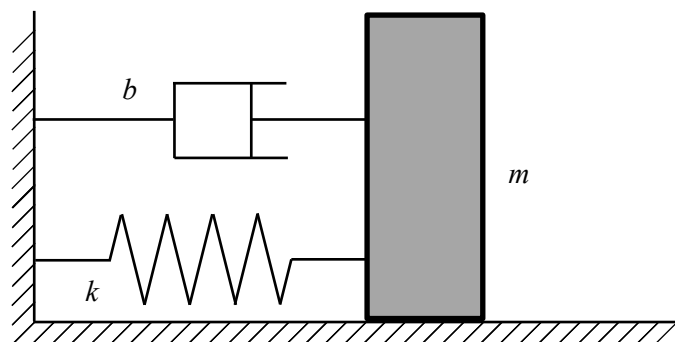
Na Obr. 1-2 je pro znázornění významu použitých veličin vykreslen časový průběh výchylky při netlumeném volném kmitání. Je zřejmé, že výchylka se opakuje s periodou odpovídající vlastnímu kmitočtu po nekonečně dlouhou dobu a s neměnnou amplitudou. [2]



Obr. 1-2 – Časový průběh výchylky při netlumeném volném kmitání [2]

1.2 Volné tlumené kmitání

Rozdíl oproti netlumenému volnému kmitání je v tom, že se do modelu přidává tlumič, což má za následek postupné zmenšování amplitudy kmitání až do úplného zániku pohybu. Tlumič vytváří brzdou sílu přímo úměrně závislou na rychlosti pohybu tělesa. Dochází tedy k postupnému maření vložené energie. [2]



Obr. 1-3 – Model mechanické tlumené kmitající soustavy [2]

kde: b – součinitel tlumení (N·s/m)

Pro tlumící sílu F_b (N) platí:

$$F_b = b \cdot v = b \cdot \frac{dx}{dt} \quad (1-9)$$

Pohybová rovnice pak přejde na tvar:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (1-10)$$

kde pro vlastní úhlový kmitočet **netlumeného** kmitání Ω_0 (s⁻¹) platí rovnice (1-1) a pro konstantu dozívání δ (s⁻¹) platí:

$$\delta = \frac{b}{2 \cdot m} \quad (1-11)$$

Pro vlastní úhlový kmitočet **tlumeného** kmitání Ω (s⁻¹) platí:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \quad (1-12)$$

Tomu odpovídá vlastní frekvence tlumeného kmitání:

$$f = \frac{\Omega}{2 \cdot \pi} \quad (1-13)$$

Pro periodu tlumeného kmitání platí:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \quad (1-14)$$

Při podkritickém tlumení bude řešení pohybové rovnice (1-10) následovné:

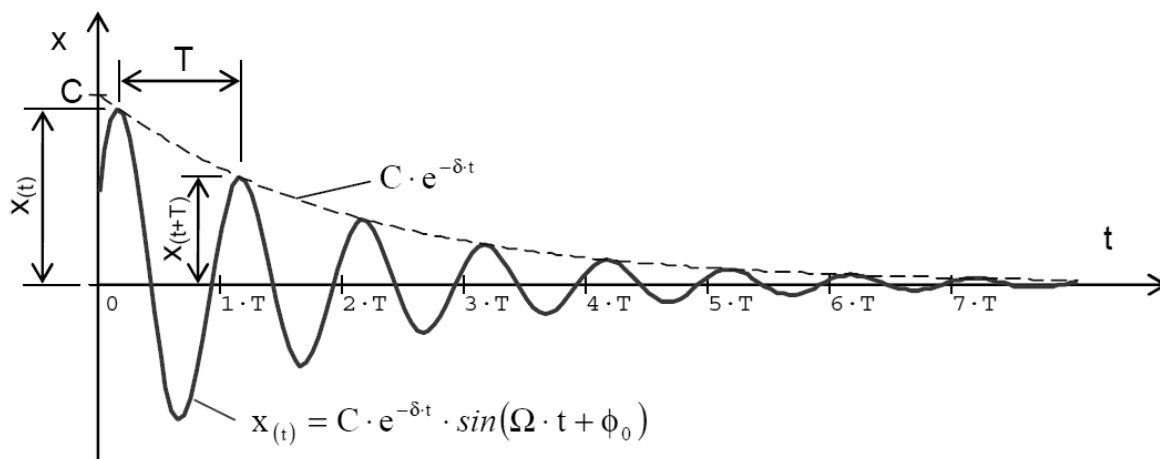
$$x(t) = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \Phi_0) \quad (1-15)$$

C a Φ_0 se opět určí z počátečních podmínek:

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + x_0 \cdot \delta)^2}{\Omega^2}} \quad (1-16)$$

$$\Phi_0 = \arctan \frac{\Omega \cdot x_0}{v_0 + x_0 \cdot \delta} \quad (1-17)$$

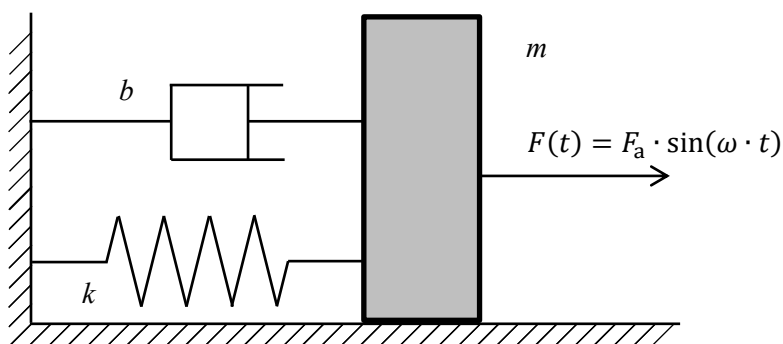
Na Obr. 1-4 je opět vyneseno časový průběh výchylky při podkriticky tlumeném kmitání. Je zřejmé, že amplituda kmitů se v čase exponenciálně snižuje. Poměr jakékoliv maximální výchylky a maximální výchylky o jednu periodu vzdálené je vždy konstantní – teoreticky tedy k úplnému zániku tlumeného kmitání dojde až po nekonečně dlouhé době. Velmi důležité je uvědomit si, že tlumená soustava bude mít vždy nižší vlastní kmitočet, než soustava netlumená – čím větší bude tlumení, tím více klesne i vlastní kmitočet tlumené soustavy. [2]



Obr. 1-4 – Časový průběh výchylky při podkriticky tlumeném kmitání [2]

1.3 Kmitání vynucené harmonickou budící silou

Na rozdíl od předchozích dvou případů, kdy byla budící síla rovna nule se nyní uvažuje s harmonickým průběhem této síly. Na Obr. 1-5 je znázorněn model tlumené kmitající soustavy s harmonickou budící silou. [2]



Obr. 1-5 – Model tlumené kmitající soustavy s harmonickou budící silou [2]

Pro budící sílu platí:

$$F(t) = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1-18)$$

kde: F_a – amplituda budící síly (N); ω – úhlový kmitočet budící síly (s^{-1})

Pro frekvenci budící síly samozřejmě platí:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad (1-19)$$

A pro periodu budící síly platí:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (1-20)$$

Opět lze psát pohybovou rovnici:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1-21)$$

Řešení této diferenciální rovnice je nutné hledat jako superpozici homogenního a partikulárního řešení:

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}} \quad (1-22)$$

Pro homogenní řešení platí:

$$x_{\text{hom}} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \Phi_0) \quad (1-23)$$

U homogenního řešení se pravá strana pohybové rovnice proloží nule – výsledek i význam veličin je stejný jako u vlastního tlumeného kmitání – viz. Obr. 1-4.

Partikulární řešení je odezva soustavy na budící sílu – jedná se o ustálený stav:

$$x_{\text{part}} = x_a \cdot \sin(\omega \cdot t - \Phi) \quad (1-24)$$

kde: ω – úhlový kmitočet odezvy (stejný jako úhlový kmitočet budící síly) (s^{-1}); Φ – fázový posuv (rad)

Pro amplitudu vynuceného kmitání x_a (m) platí:

$$x_a = \frac{F_a}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}} \quad (1-25)$$

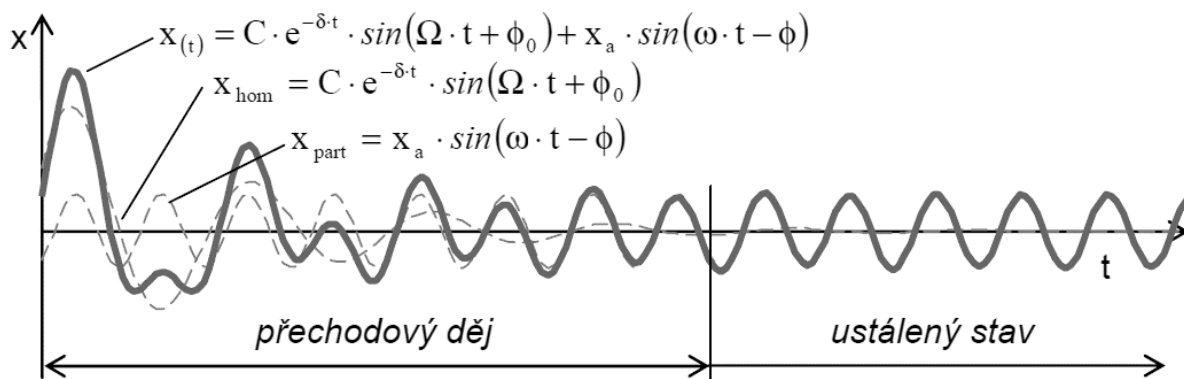
A fázový posuv Φ (rad) se vypočte na základě vztahu:

$$\tan \Phi = \frac{b \cdot \omega}{k - m \cdot \omega^2} = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0^2 - \omega^2} \quad (1-26)$$

Pro výsledný časový průběh výchylky tedy platí:

$$x(t) = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \Phi_0) + x_a \cdot \sin(\omega \cdot t - \Phi) \quad (1-27)$$

Na Obr. 1-6 je znázorněn časový průběh výchylky při harmonickém průběhu budící síly. Odezvu lze rozdělit na 2 části – přechodový děj a ustálený stav. Přechodový děj končí v okamžiku, kdy považujeme homogenní složku (1-23) za utlumenou. Jakmile dojde k utlumení homogenní složky, následuje tzv. ustálený stav, který trvá až do zániku budící síly. Úhel Φ vyjadřuje zpoždění odezvy oproti budící síle. Velikost tohoto úhlu, i amplituda vynuceného kmitání **jsou frekvenčně závislé** – viz amplitudové a fázové charakteristiky v následující podkapitole. [2]



Obr. 1-6 – Odezva soustavy na harmonický průběh budící síly [2]

1.4 Rezonance

Rezonance je stav mechanické soustavy, který vzniká, když je frekvence budící síly stejná, nebo velmi blízká vlastní frekvenci této soustavy. Při rezonanci může výchylka soustavy nabývat velmi vysokých hodnot. V praxi může mít rezonance kromě výrazného zvýšení hluku, resp. vibrací i destruktivní účinky. V návaznosti na předchozí podkapitoly můžeme definovat poměrný útlum ξ (-):

$$\xi = \frac{\delta}{\Omega_0} \quad (1-28)$$

a činitel naladění η (-):

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_0} \quad (1-29)$$

Rovnici (1-25) pak můžeme přepsat do tvaru:

$$x_a = \frac{F_a}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}} = x_{\text{stat}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \eta)^2}} \quad (1-30)$$

kde pro statickou výchylku x_{stat} (m) platí:

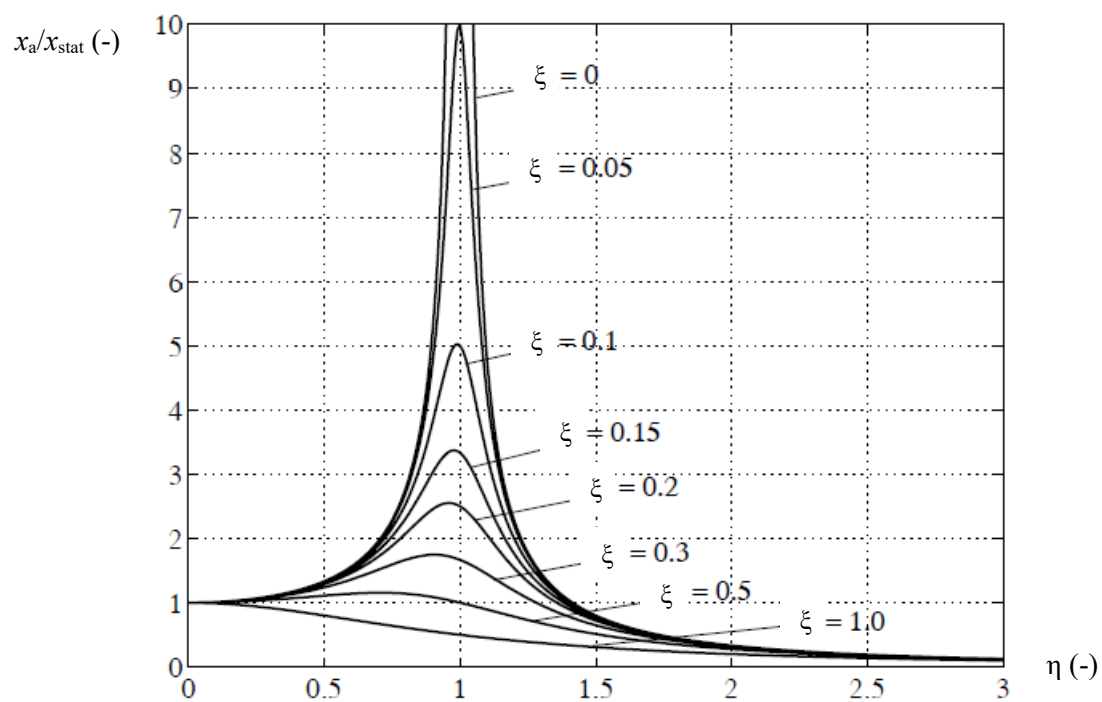
$$x_{\text{stat}} = \frac{F_a}{k} \quad (1-31)$$

Stejným způsobem lze upravit rovnici (1-26):

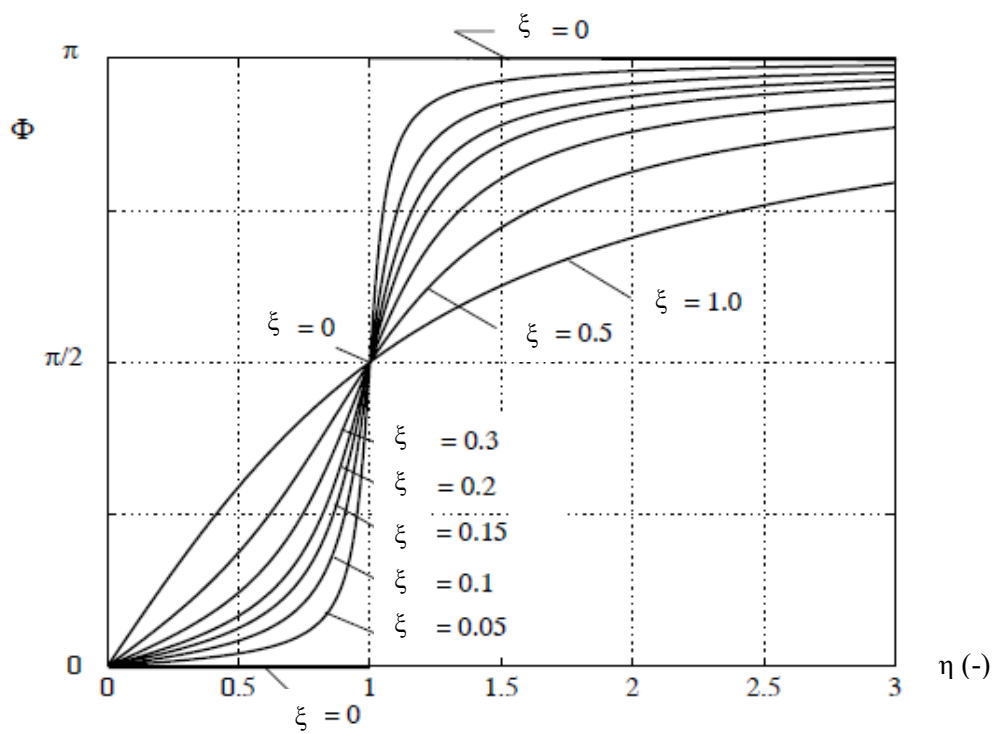
$$\tan \Phi = \frac{2 \cdot \xi \cdot \eta}{1 - \eta^2} \quad (1-32)$$

Z výše uvedených rovnic je zřejmé, že jak amplituda kmitů, tak fázový posuv mezi budící silou a výchylkou jsou frekvenčně závislé. Tyto veličiny se vykrešují v závislosti na frekvenci budící síly v tzv. frekvenčních charakteristikách. Na Obr. 1-7 jsou vykresleny amplitudové frekvenční charakteristiky znázorňující velikost amplitudy kmitů v závislosti na činiteli naladění pro různé hodnoty poměrného útlumu. Všechny křivky jsou vykresleny pro budící sílu se stejnou amplitudou. Je zřejmé, že poměrný útlum má zásadní vliv na amplitudu kmitů. Méně patrné už je, že s rostoucím poměrným útlumem dochází k posunu maxima směrem k nižším hodnotám činitele naladění – viz rovnice (1-12). Při nulové frekvenci budící síly ($F(t) = F_a = \text{konst.}$) je výchylka rovna statické výchylce (rovnice (1-31)). Z amplitudové charakteristiky je dále patrné, že pokud je činitel naladění výrazně vyšší než 1, tak se amplituda výchylky začíná blížit k nule. Souvisí to se setrvačností kmitajícího tělesa – než se těleso stihne uvést do pohybu následkem působení síly z jedné strany, tak už tato síla dávno působí z opačné strany a situace se opakuje. [2]

Na Obr. 1-8 jsou znázorněny fázové frekvenční charakteristiky, které vyjadřují závislost fázového posuvu mezi budící silou a výchylkou na frekvenci budící síly, resp. činiteli naladění. Z charakteristik je patrné, že pro netlumenou soustavu je při $\eta < 1$ fázový posuv roven 0° (síla i výchylka jsou ve fázi), pro $\eta > 1$ je tento fázový posuv π , resp. 180° (soustava kmitá v protifázi vůči budící síle). Při rezonanci je jak pro tlumené, tak netlumené soustavy fázový posuv roven přesně 90° - toho se dá využít pro detekci rezonance. U tlumených soustav dochází k plynulé změně fázového posuvu v okolí rezonance, na rozdíl od netlumené soustavy, kdy je změna skoková. [2]



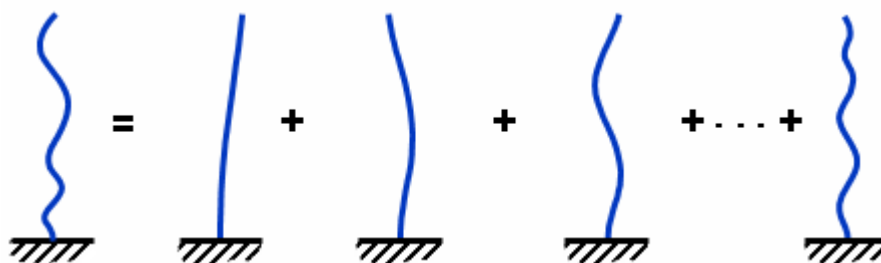
Obr. 1-7 – Amplitudová frekvenční charakteristika [3]



Obr. 1-8 – Fázová frekvenční charakteristika [3]

1.5 Tvarové módy

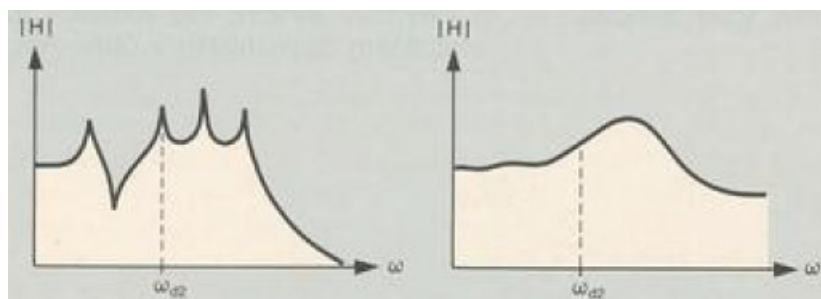
V předchozích podkapitolách byly vysvětleny teoretické základy mechanického kmitání v soustavách s jedním stupněm volnosti. Takové soustavy mají jen jeden vlastní kmitočet. Když bude mít budící síla kmitočet stejný, tak nastává rezonance. Problematika kmitání v reálných soustavách je však mnohem složitější, jelikož takové soustavy mají většinou mnoho vlastních kmitočtů. Každému takovému kmitočtu náleží určitý vlastní mód, který znázorňuje tvar kmitů soustavy při rezonanci na tomto vlastním kmitočtu bez vlivu ostatních vlastních módů. Při obecné frekvenci budící síly (mimo oblasti rezonancí) bývá tvar kmitů dosti složitý a je tvořen superpozicí jednotlivých vlastních módů. To, jak výrazně se jednotlivé módy budou na výsledném tvaru kmitů podílet, záleží především na frekvenci budící síly – pokud bude stejná jako vlastní frekvence některého módu, tak se tento mód většinou bude na výsledném tvaru kmitů podílet dominantně a amplitudy ostatních módů tak budou zpravidla zanedbatelné. Princip rozkladu složitého tvaru kmitů na jednotlivé módy je znázorněn na Obr. 1-9. [4]



Obr. 1-9 – Princip rozkladu na jednotlivé vlastní módy [5]

Každý vlastní mód je charakterizován tím, že jednotlivé body tělesa se pohybují se sinusovou výchylkou ve fázi nebo protifázi (tedy se vzájemným fázovým posuvem 0° nebo 180°) a s daným vlastním kmitočtem. Každý vlastní mód je dále charakterizován tzv. uzly, což jsou místa, ve kterých je výchylka kmitů nulová. [4]

Vlastní módy dále mohou být slabě vázané, nebo silně vázané. Módy slabě vázané se zpravidla vyskytují u soustav s malým tlumením. Vyznačují se tím, že ve frekvenčních charakteristikách jsou jednotlivé módy zřetelně odděleny. Naproti tomu silně vázané módy se často vyskytují u silně tlumených soustav nebo u soustav s velkou hustotou módů. Rozdíly jsou zřejmé na Obr. 1-10. [4]



Obr. 1-10 – Frekvenční charakteristiky slabě (vlevo) a silně (vpravo) vázaných módů [4]

2. Kmitání v asynchronních strojích

2.1 Úvod

V asynchronním stroji existuje velké množství budících sil, které lze rozdělit na síly mechanického a magnetického původu. Podrobný popis magnetických sil je uveden v následující kapitole. Každá radiální síla je charakterizována svým řádem a frekvencí. Řád síly zjednodušeně řečeno popisuje, jak vypadá prostorové rozložení radiální síly podél vzduchové mezery, jinak řečeno řád síly říká, kolik má daná síla maxim po obvodu vzduchové mezery. Pokud bude řád budící síly r stejný, jako řád příslušného tvarového módu m , a zároveň pokud bude kmitočet budící síly stejný jako vlastní kmitočet daného módu, tak nastává nežádoucí rezonance. [6]

Stator lze zjednodušeně považovat za dutý válec. Amplitudu kmitů x_m (m) pro mód řádu m lze obecně vyjádřit vztahem:

$$x_m = \frac{F_m/M}{\sqrt{(\omega_m^2 - \omega_r^2)^2 + 4 \cdot \xi_m^2 \cdot \omega_m^2 \cdot \omega_r^2}} \quad (2-1)$$

kde: F_m – amplituda síly (N) M – hmotnost statorového systému (kg); ω_m – vlastní úhlový kmitočet módu m (s^{-1}); ω_r – úhlový kmitočet síly řádu r (s^{-1}); ξ_m – činitel tlumení módu m (-) [6]

Stanovení činitele tlumení (který má rozhodující vliv na amplitudu kmitů – viz Obr. 1-7) je komplikované kvůli jeho frekvenční závislosti. Dále je výrazně ovlivněn vinutím a laminací svazku. Pro stroje s malým a středním výkonem lze činitel tlumení přibližně určit na základě empirického vztahu [6]:

$$\xi_m = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (2,76 \cdot 10^{-5} \cdot f_m + 0,062) \quad (2-2)$$

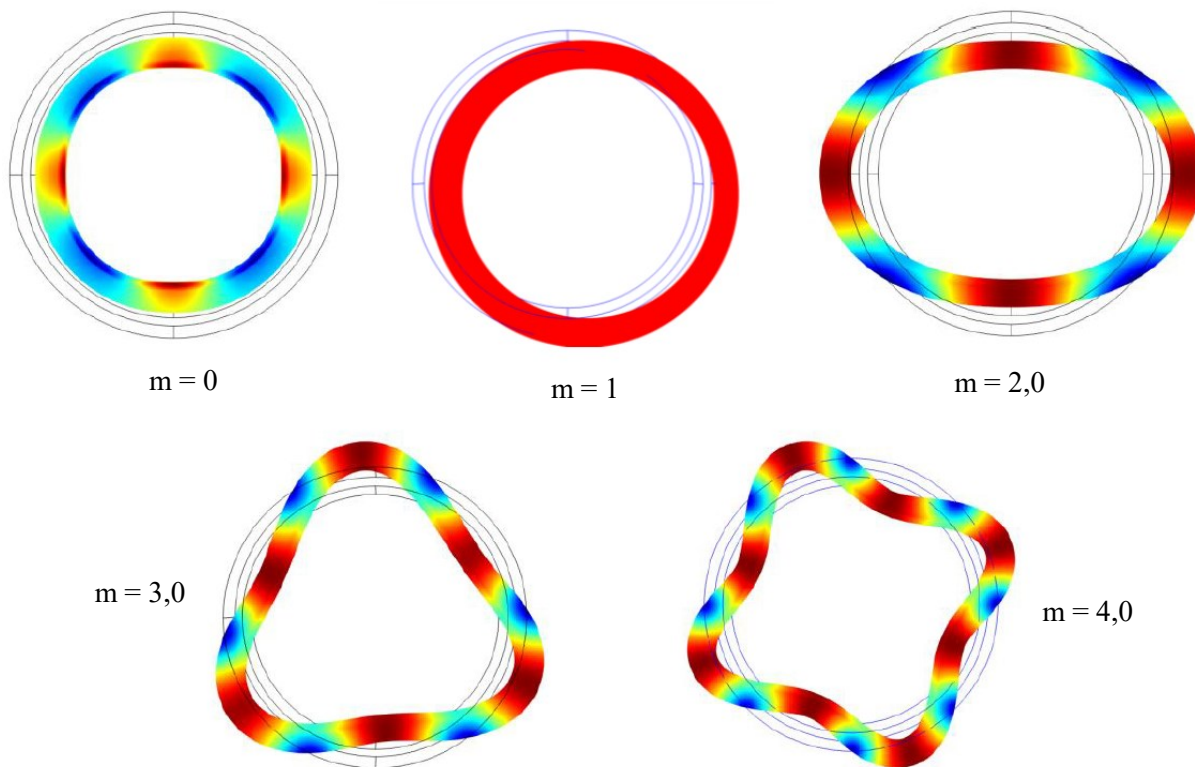
Pro snížení vibrací vybuzeých magnetickými silami je vhodné dodržovat následující zásady [1]:

- Návrh stroje provést tak, aby se kmitočty sil neshodovaly s vlastními kmitočty statorového svazku
- Používat doporučené počty statorových a rotorových drážek
- Používat nižší hodnoty magnetické indukce ve vzduchové mezeře
- Zvětšit vzduchovou mezeru
- Pokud je to možné, použít magnetické drážkové klíny
- Dbát na to, aby excentricita rotoru byla co nejmenší
- Používat co největší počet drážek na pól a fázi
- Používat dvouvrstvé vinutí
- Provést zešíkmení drážek o drážkovou rozteč
- Zvýšit tuhost konstrukce stroje

Je ale zřejmé, že některé z těchto zásad mohou nepříznivě ovlivnit různé provozní vlastnosti stroje, jako například proud naprázdno atd.

2.2 Tvarové módy statorového svazku asynchronního stroje

Na Obr. 2-1 je znázorněno několik radiálních vlastních módů statorového svazku. Obecně platí, že největší problémy z pohledu hluku u strojů s malým a středním výkonem způsobují právě tyto módy nízkého řádu. [7]



Obr. 2-1 – Radiální vlastní módy statorového svazku [1]

Mód řádu $m = 0$ – Tento mód se vyznačuje tím, že statorový svazek se deformuje tak, že tzv. “dýchá”, nebo pulzuje. Tuto situaci lze srovnat s válcovou nádobou s časově proměnným vnitřním tlakem [8]

Mód řádu $m = 1$ – Tento vlastní mód představuje jednosměrnou deformaci statoru a může být vybuzen jednostranným magnetickým tahem. Tato složka síly vzniká interferencí dvou harmonických indukcí, u kterých se počet pólů liší o jedničku. [8]

Módy řádu $m = 2,0; 3,0; 4,0...$ – Tyto vlastní módy představují deformace statoru ve tvaru vln. [8]

V současnosti existují různé metody pro výpočet vlastních kmitočtů jednotlivých módů u statorových svazků. V zásadě můžeme tyto metody rozdělit na analytické a numerické. Nejdůležitějším faktorem je přesnost získaných výsledků. Nejlepší výsledky obecně nabízí výpočty pomocí metody konečných prvků s využitím příslušného SW. Výhoda analytických metod výpočtu zase spočívá v tom, že nám mohou rychle poskytnout hrubý odhad výsledků, navíc lze takový výpočet snadno zredukovat

na pouhé zadání vstupních hodnot do tabulky v Excelu s předem připravenými vztahy. Největší výzvou při výpočtu je zahrnutí vlivu vinutí a izolace, a to i při využití metody konečných prvků. [7]

Některé metody analytického výpočtu modelují stator jako tenký prstenec se zanedbáním vlivu kostry. Vliv zubů a vinutí se v jednotlivých metodách zahrnuje různě. Někde se vinutí a zuby zahrnují jen jako přídavná hmotnost. Někde se zuby uvažují jako nosníky s jejich vlastními vibracemi – tento vliv lze většinou u malých a středních motorů zanedbat, jelikož zuby bývají krátké a jejich vlastní kmitočty jsou tak velmi vysoké a dále kmity zubů jsou omezeny vinutím s impregnací. [7]

2.3 Analytický výpočet vlastních kmitočtů statoru asynchronního stroje

Dále bude uvedena metoda analytického výpočtu vlastních kmitočtů převzatá z [6]. Tento analytický výpočet vychází ze základního vztahu pro vlastní kmitočet:

$$f_m = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K_m}{M_m}} \quad (2-3)$$

Tento výpočet jednotlivé části statorového systému (jho, zuby, vinutí, kostra) uvažuje jako válcové skořepiny.

2.3.1 Vlastní kmitočty statorového jha

Vlastní kmitočty statorového jha (bez vlivu vinutí a zubů) pro módy řádu $m \geq 0$ se dají vypočítat dle následujícího vztahu:

$$f_m = \frac{\Omega_m}{\pi \cdot D_c} \cdot \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c \cdot (1 - \nu_c^2)}} \quad (2-4)$$

kde: D_c – střední průměr jha (m); E_c – modul pružnosti statorového jádra (Pa); ν_c – Poissonův poměr statorového jádra (-)

pro parametr Ω_m (-) při $m = 0$ platí:

$$\Omega_0 = 1 \quad (2-5)$$

a pro $m \geq 1$ se vypočte jako:

$$\Omega_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1 + m^2 + \kappa^2 \cdot m^4) \pm \sqrt{(1 + m^2 + \kappa^2 \cdot m^4)^2 - 4 \cdot \kappa^2 \cdot m^6}} \quad (2-6)$$

kde pro parametr κ^2 (-) platí:

$$\kappa^2 = \frac{h_c^2}{3 \cdot D_c^2} \quad (2-7)$$

kde: h_c – šířka jha (m)

Tuhost jha lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$K_m = \frac{4 \cdot \Omega_m^2}{D_c} \cdot \frac{\pi \cdot L_i \cdot h_c \cdot E_c}{1 - \nu_c^2} \quad (2-8)$$

kde: L_i – délka statorového svazku (m)

2.3.2 Vlastní kmitočet svazku se zahrnutím zubů a vinutí

Vinutí a zuby se pro účely tohoto výpočtu dají považovat za další válcovou skořepinu uvnitř skořepiny reprezentující statorové jho. Pro výsledné vlastní kmitočty statorového systému včetně vlivu kostry pak bude platit přibližný vztah:

$$f_{mn} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K_m^{(c)} + K_{mn}^{(f)} + K_m^{(w)}}{M_c + M_f + M_w}} \quad (2-9)$$

Jelikož výsledný moment setrvačnosti souosých válců je roven součtu momentů setrvačnosti jednotlivých válců, je možné vlastní kmitočet statorového systému počítat s uvažováním paralelního řazení dílčích tuhostí a hmotností, které tak lze sečíst. Jelikož cílem této práce bylo měření a modelování statorového svazku bez kostry, je možné výše uvedený vztah upravit na:

$$f_m \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{K_m^{(c)} + K_m^{(w)}}{M_c + M_w}} \quad (2-10)$$

kde: $K_m^{(c)}$ – tuhost jha (N/m) dle (2-8); $K_{mn}^{(f)}$ – tuhost kostry (N/m); $K_m^{(w)}$ – tuhost vinutí a zubů (N/m); M_c – hmotnost jha (kg); M_f – hmotnost kostry (kg); M_w – hmotnost zubů, vinutí a izolace (kg)

Tuhost zubů a vinutí se dá vypočítat dle:

$$K_m^{(w)} = \frac{\Omega_m^2}{R_w^2} \cdot \frac{E_w \cdot V_w}{1 - \nu_w^2} \quad (2-11)$$

kde: E_w – ekvivalentní modul pružnosti vinutí a izolace (Pa) – dle [6] $E_w \approx 9,4 \cdot 10^9$ Pa; ν_w – Poissonův poměr pro vinutí a izolaci – dle [6] $\nu_w \approx 0,35$ (-); pro R_w (m) platí:

$$R_w = \frac{1}{2} \cdot (D_{lin} + h_t) \quad (2-12)$$

kde: h_t – výška zubu (m); D_{lin} – vnitřní průměr statoru (m)

Pro ekvivalentní objem vinutí platí:

$$V_w = 2 \cdot \pi \cdot R_w \cdot h_t \cdot (L_i + 2 \cdot h_{ov}) \quad (2-13)$$

kde: h_{ov} – přesah čela vinutí (m)

2.4 Výpočet vlastních kmitočtů pomocí metody konečných prvků

Využití numerických metod je obzvláště výhodné pro analýzu složitých soustav, ve kterých by bylo využití analytických metod příliš komplikované. Jedním z nejvíce populárních SW využívajících metodu konečných prvků (dále MKP) je program Ansys. V MKP je složitý systém rozdělen na velmi malé elementy, jejichž tvar a velikost bývá určena uživatelem, případně automaticky programem. Přesnost výsledků získaných MKP obecně závisí na použitém počtu prvků. Velký počet prvků ovšem výrazně zvyšuje náročnost na výpočetní výkon a dobu výpočtu. [6]

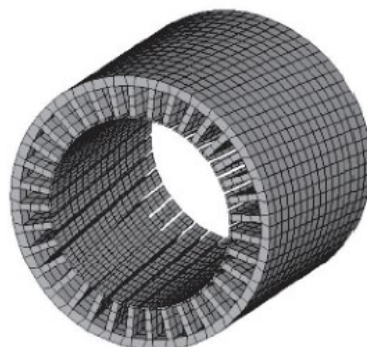
Velkou výhodou metody konečných prvků oproti analytickému výpočtu je, že dokáže s dostatečnou přesností brát v úvahu vliv ložiskových štítů, patek a přírub, svorkovnic atd. I tak ale MKP naráží na spoustu problémů, které lze jen těžko modelovat, např. [6]:

- Statorový svazek je skládaný ze vzájemně izolovaných plechů, v důsledku toho má svazek velmi rozdílné materiálové vlastnosti v jednotlivých směrech.
- Při opracování plechů vzniká vnitřní pnutí dále ovlivňující vlastnosti
- Změny tuhosti při měnění se teplotě (rozdílná teplotní roztažnost svazku a kostry)
- Je obtížné odhadnout činitele tlumení u struktur složených z rozdílných materiálů jako ocel, měď, izolace, impregnace. Tlumení má přitom rozhodující vliv na amplitudu kmitů.

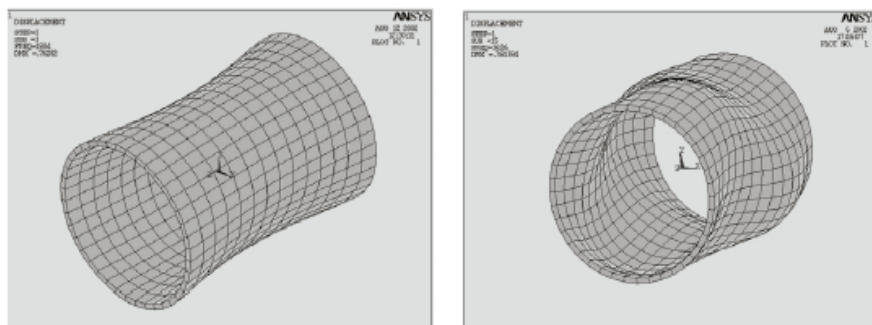
Při modální analýze s použitím numerických metod je obvykle nutné provést následující kroky [6]:

- Vytvoření geometrie zkoumaného systému
- Nadefinování materiálových vlastností
- Rozdělení objektu na jednotlivé elementy
- Zavedení okrajových podmínek – místa vetknutí atd.
- Řešení
- Postprocessing – znázornění výsledků v grafech, tabulkách, animacích atd.

Provedení výše uvedených kroků je časově náročné, zejména ve srovnání s analytickým výpočtem v předchozí podkapitole. Na Obr. 2-2 a Obr. 2-3 je znázorněn příklad modelu statorového svazku a příklad tvarových módů v programu Ansys.



Obr. 2-2 – Příklad modelu statorového svazku v programu Ansys [6]



Obr. 2-3 – Příklad tvarových módů v programu Ansys [6]

Postup modální analýzy v programu Ansys Workbench bude dále popsán v rámci praktické části práce na statorovém svazku.

3. Budící síly v asynchronním stroji

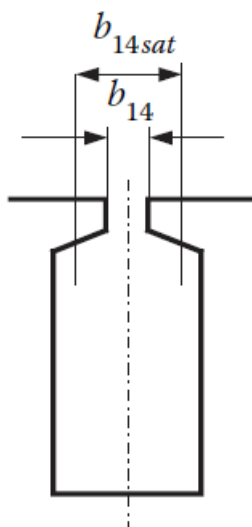
Budící síly, vznikající při chodu asynchronního motoru, lze z hlediska příčin vzniku rozdělit na mechanické a magnetické. Magnetické síly vznikají v důsledku přítomnosti základní harmonické a vyšších harmonických složek magnetické indukce ve vzduchové mezeře. Tyto složky lze rozdělit na drážkové harmonické, harmonické vznikající v důsledku excentricity rotoru a dále saturace magnetického obvodu. Nejdominantnější z hlediska hluku jsou radiální magnetické síly, na které bude tato kapitola zaměřena. Dále v magnetickém obvodu vznikají síly v důsledku jevu zvaného magnetostrikce. Mechanické síly mají svůj původ zejména v nevyváženosti rotoru a v ložiskách. [7]

3.1 Vlivy ovlivňující magnetické pole ve vzduchové mezeře

Podrobný rozbor vlivu saturace, excentricity a drážkování na magnetické pole ve vzduchové mezeře včetně matematického popisu je uveden v [6].

3.1.1 Saturace

V asynchronním stroji dochází k nasycení zejména ve špičkách zubů a můstcích rotorových zubů v případě použití uzavřených rotorových drážek. V důsledku přesycení výrazně klesá relativní permeabilita těchto částí. Výsledný efekt je ekvivalentní fiktivnímu zvětšení otevření drážek, jak lze vidět na Obr. 3-1. [6]

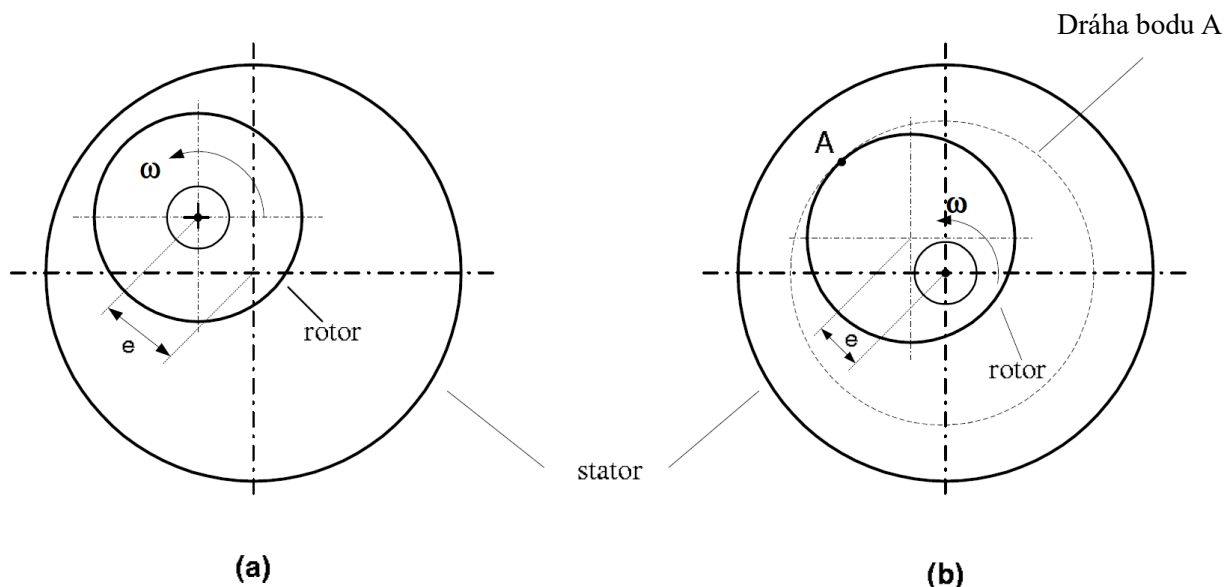


Obr. 3-1 – Fiktivní zvětšení otevření drážky vlivem saturace [6]

Vliv saturace je závislý především na velikosti satorového proudu a stává se významný hlavně při překročení jmenovitého proudu. Přesycení špiček a můstků zubů tak může nastat hlavně během rozběhu motoru v důsledku velkého záběrného proudu. [7]

3.1.2 Statická a dynamická excentricita

Existují 2 druhy excentricity vzduchové mezery – statická a dynamická. V obou případech vzniká nestejnoměrná vzduchová mezera, která způsobuje vznik vyšších harmonických magnetického pole. Oba druhy excentricity jsou znázorněny na Obr. 3-2. [7]

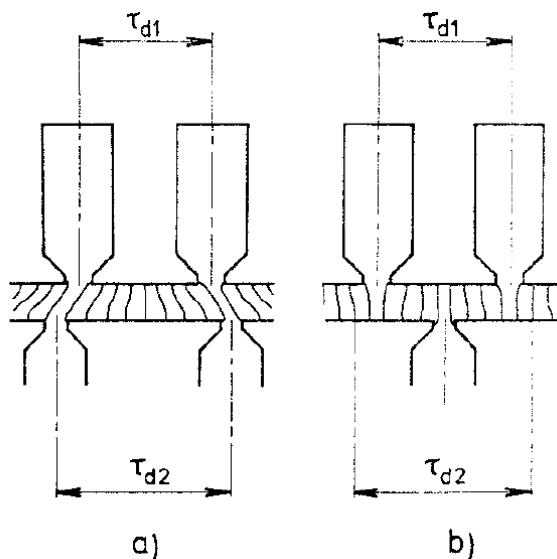


Obr. 3-2 – Excentricita rotoru: (a) statická, (b) dynamická [7]

V případě statické excentricity je vzduchová mezera nerovnoměrná kvůli tomu, že osa rotoru leží v jiném místě než osa statoru. V jakémkoliv místě po obvodu statoru zůstává vzduchová mezera konstantní v čase. V případě dynamické excentricity je vzduchová mezera rovněž nerovnoměrná, ovšem její velikost se v určitém místě mění s časem. Statická excentricita může být způsobena oválným nebo eliptickým statorovým svazkem, nesprávným uložením ložisek při montáži atd. Dynamická excentricita může být způsobena prohnutým hřídelem, opotřeбенými ložisky atd. V důsledku excentricity vzniká tzv. jednostranný magnetický tah. [7]

3.1.3 Drážkování

Pokud by stator i rotor asynchronního motoru měl uzavřené drážky, byla by vzduchová mezera z obou stran obklopena hladkými feromagnetickými válci. Pokud by v tomto případě bylo nasycení můstků, které tyto drážky uzavírají, nepatrné, tak by křivka magnetického pole ve vzduchové mezeře měla stejný tvar, jako křivka magnetomotorického napětí. U běžných strojů jsou většinou drážky alespoň jednoho vinutí otevřené – rozložení magnetického pole se tak podstatně změní. Magnetická vodivost vzduchové mezery bude pochopitelně jiná mezi dvěma zuby než mezi zubem a sousedící drážkou – viz Obr. 3-3. Křivka magnetického pole ve vzduchové mezeře tak bude mít jiný tvar než křivka magnetomotorického napětí statoru. [9]



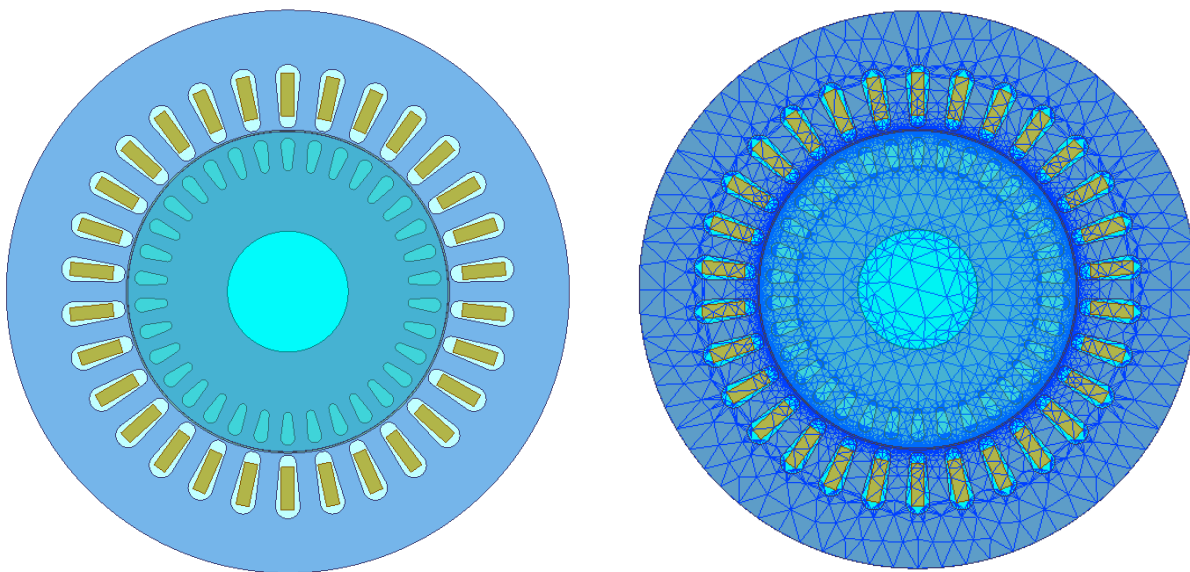
Obr. 3-3 – Změna magnetické vodivosti vzduchové mezeře při otáčení rotoru: a) maximální magnetická vodivost, b) minimální magnetická vodivost [9]

3.2 Modelování vlivu drážkování a statické excentricity na průběh magnetické indukce v programu Ansys Maxwell

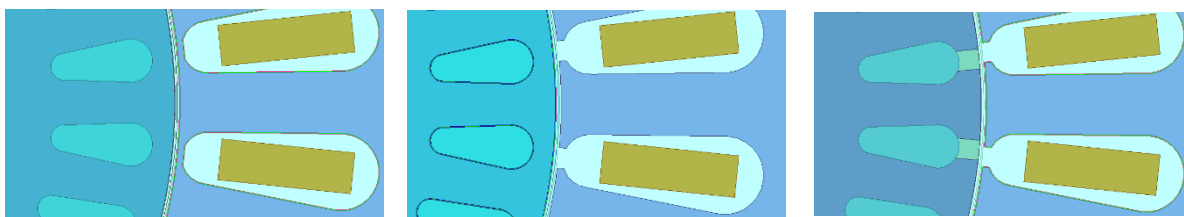
Pro názornou představu vlivu drážkování a statické excentricity rotoru na magnetickou indukci ve vzduchové mezeře bylo v programu Ansys Maxwell vytvořeno několik 2D modelů dvoupólového asynchronního motoru s následujícími parametry: 400/230 V, 50 Hz, 15 kW, 30 statorových drážek, 34 rotorových drážek. Byly zkoumány následující modely:

- Model 1 – uzavřené drážky na rotoru i statoru
- Model 2 – uzavřené drážky na rotoru, otevřené drážky na statoru
- Model 3 – otevřené drážky na rotoru i statoru
- Model 4 - uzavřené drážky na rotoru, otevřené drážky na statoru se statickou excentricitou

Následně bylo provedeno nastavení simulace – rotoru byl pomocí funkce Band vnucen otáčivý pohyb rychlostí 3000 ot/min ve směru točivého magnetického pole – ideální chod naprázdno. Doba simulace byla nastavena na dostatečně dlouhou dobu, aby došlo k odeznění všech přechodných dějů. Ve vzduchové mezeře byla vytvořena kružnice, podél které bylo následně vykresleno rozložení magnetické indukce. Na Obr. 3-4 je zobrazen celý model včetně vykreslené sítě. Na Obr. 3-5 a Obr. 3-6 jsou potom znázorněny tvary drážek. U všech modelů byla volena vzduchová mezera 0,8 mm. Velikost excentricity je 0,4 mm. Velikost vzduchové mezery u modelu s excentricitou se tak pohybuje v mezích od 0,4 do 1,2 mm. U modelu 2 byla ještě provedena simulace při zatížení stroje – rotoru byla vnucena rychlost 2850 ot/min.

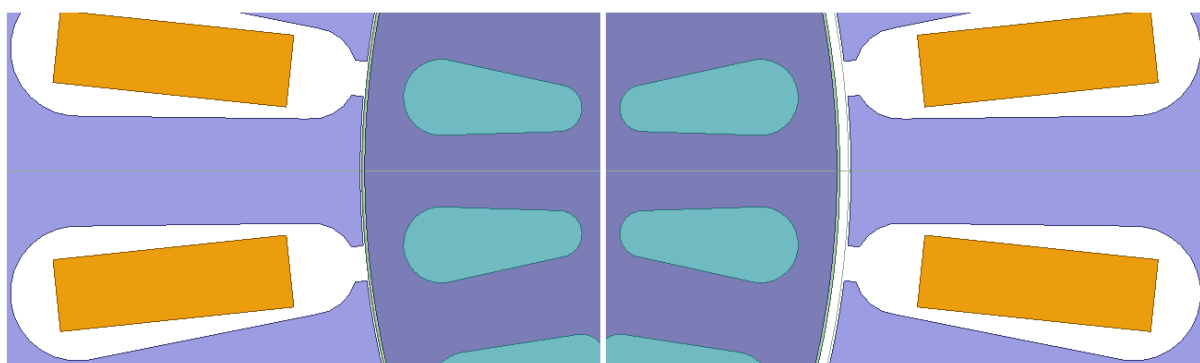


Obr. 3-4 – Model asynchronního motoru



Obr. 3-5 – Detail tvaru drážek pro modely 1; 2 a 3

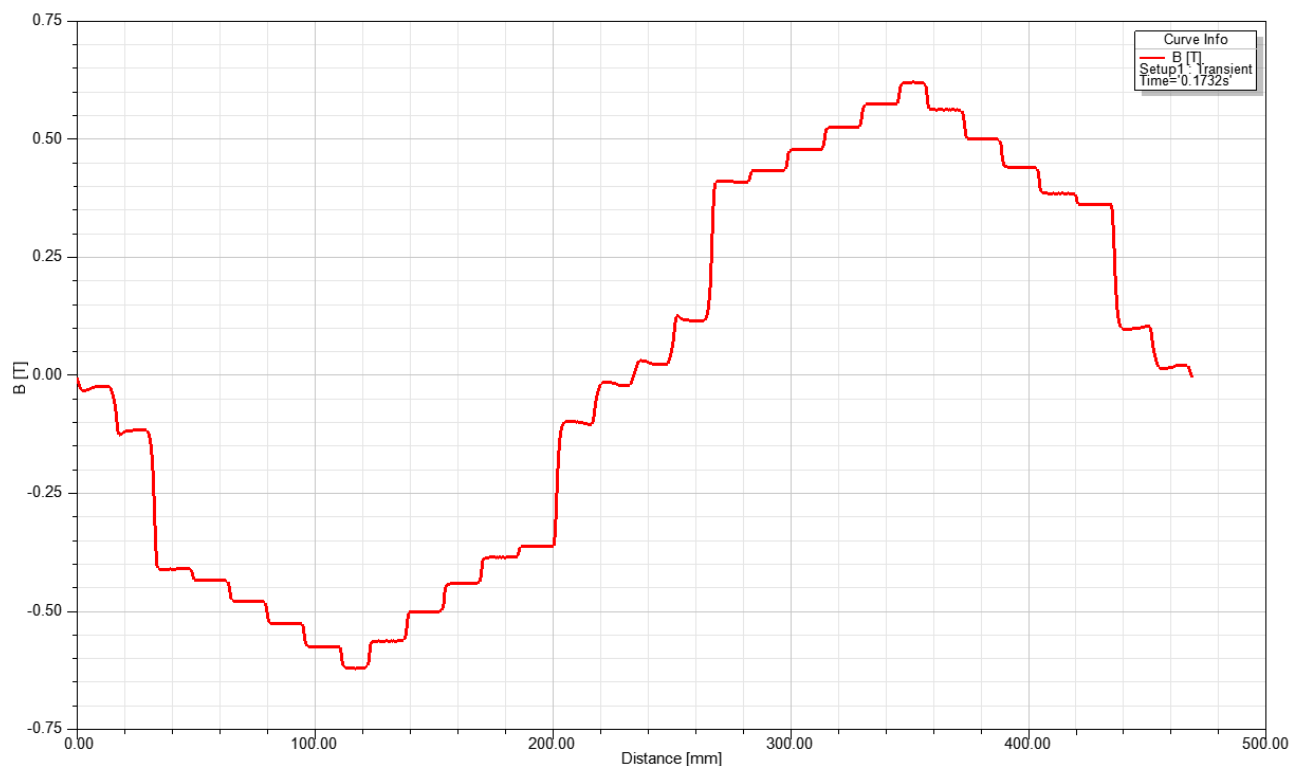
Je zřejmé, že vyrobit motor s uzavřenými statorovými drážkami je značně problematické. Uzavřené drážky se ale dají částečně napodobit použitím magnetických drážkových klínů.



Obr. 3-6 – Detail tvaru drážek pro model 4 s excentricitou

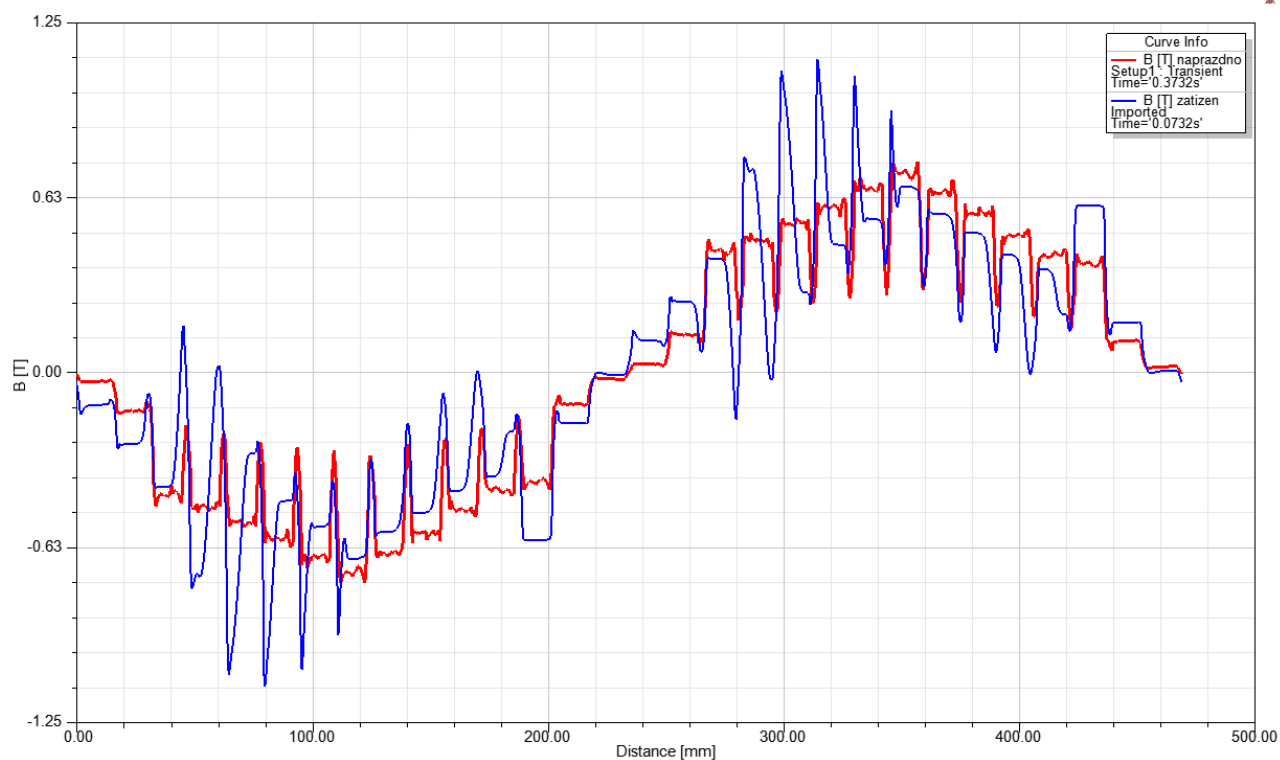
Na Obr. 3-7 až Obr. 3-10 jsou vyneseny výsledné grafy znázorňující rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro všechny modely. Ve všech případech se jedná o radiální složku magnetické indukce, která je odpovědná za vznik radiálních magnetických sil, jak bude ukázáno dále. U všech grafů jsou vykresleny průběhy pro stav naprázdno, u Obr. 3-8 je zobrazen i průběh při zatížení stroje.

3.2.1 Model 1 – uzavřené drážky na rotoru i statoru



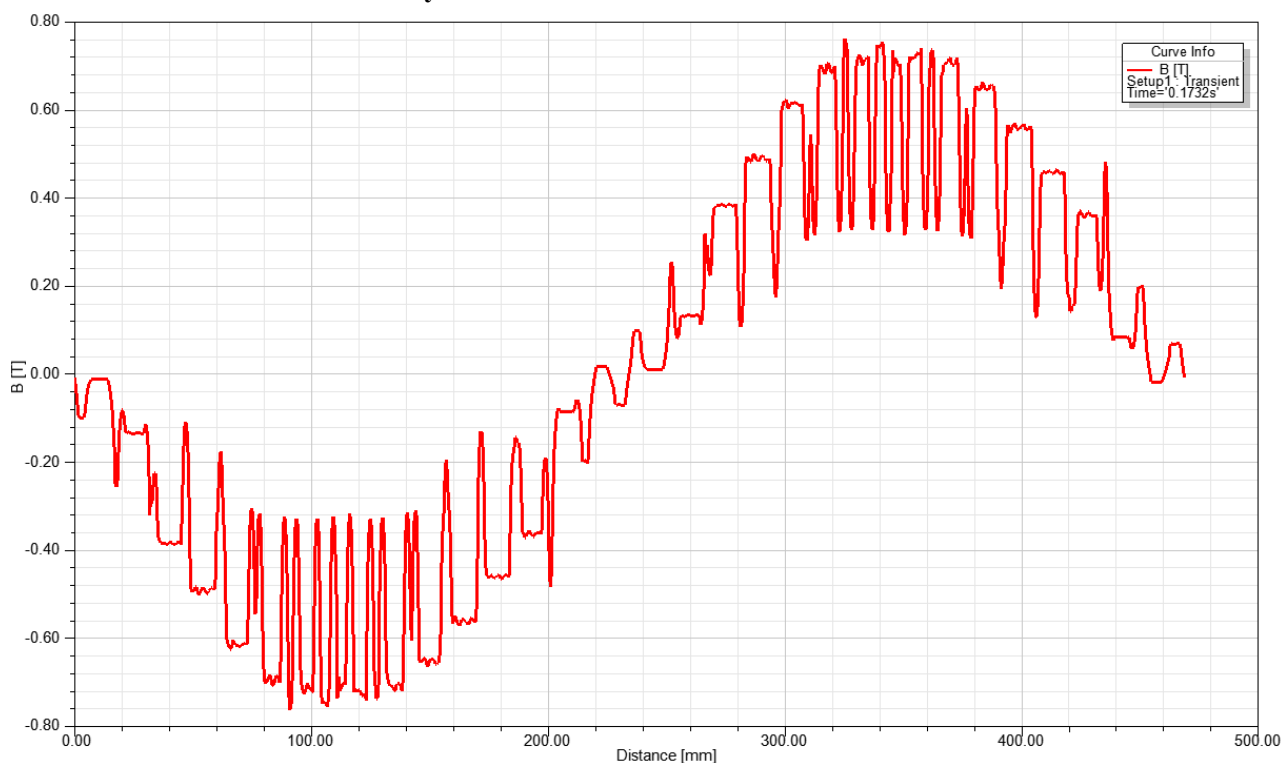
Obr. 3-7 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 1

3.2.2 Model 2 – uzavřené drážky na rotoru, otevřené drážky na statoru



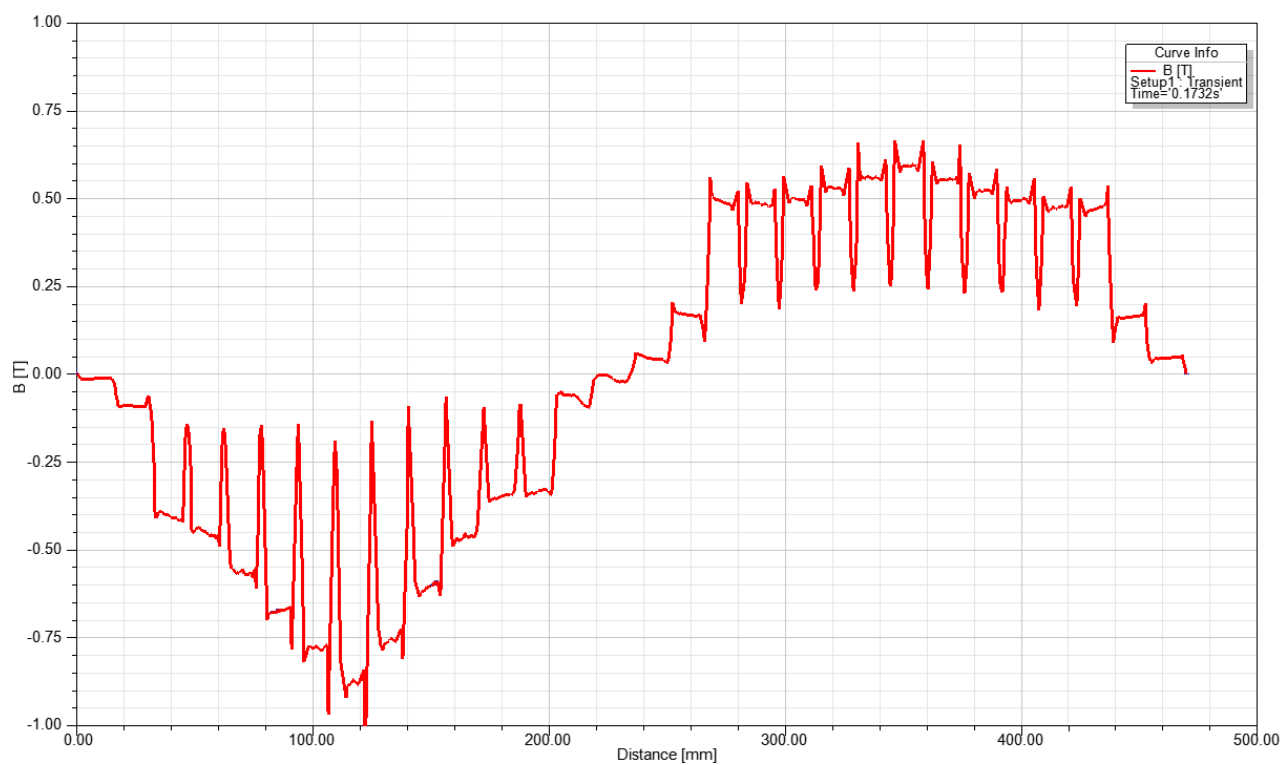
Obr. 3-8 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 2

3.2.3 Model 3 – otevřené drážky na rotoru i statoru



Obr. 3-9 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 3

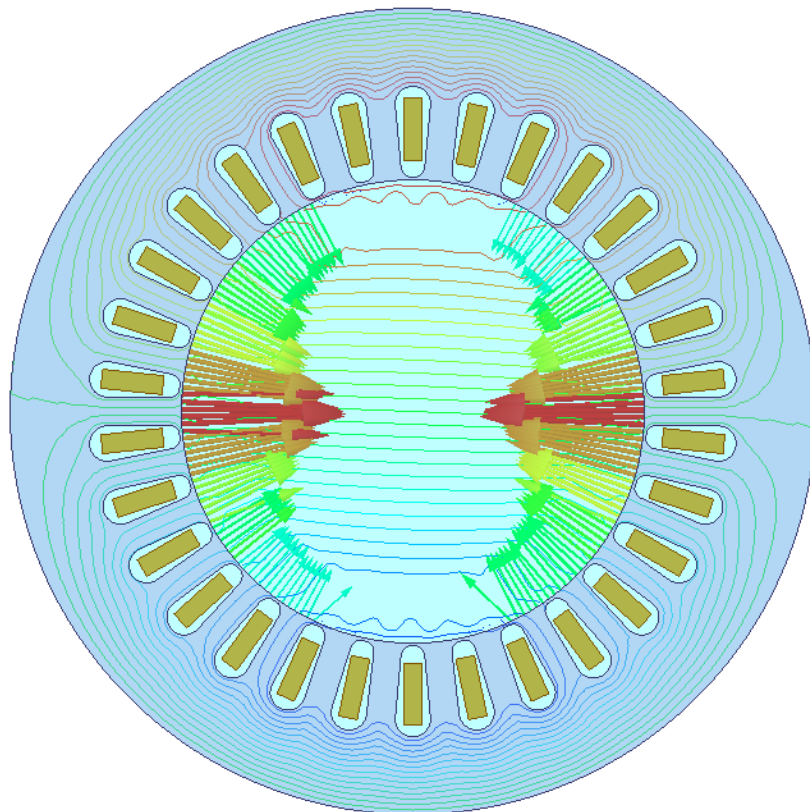
3.2.4 Model 4 - uzavřené drážky na rotoru, otevřené drážky na statoru se statickou excentricitou



Obr. 3-10 – Rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery pro model 4

3.3 Vznik radiálních magnetických sil

Radiální magnetické síly působí mezi statorem a rotorem v radiálním směru, jak lze vidět na Obr. 3-11. Šipky znázorňují velikost a směr sil. Uvedený příklad se týká dvoupólového stroje v chodu naprázdno s uzavřenými satorovými drážkami (model 1 v předchozí podkapitole – rozložení radiálních sil odpovídá rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery z Obr. 3-7 ve stejném čase – i v Obr. 3-11 lze vidět stupňovité rozložení sil.) [7]



Obr. 3-11 –Rozložení magnetických sil podél vzduchové mezery

Magnetomotorické napětí statoru lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$F_1(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} F_{mv} \cdot \cos(v \cdot p \cdot \alpha \pm \omega \cdot t) \quad (3-1)$$

Pro magnetomotorické napětí rotoru platí:

$$F_2(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_{m\mu} \cdot \cos(\mu \cdot p \cdot \alpha \pm \omega_{\mu} \cdot t + \Phi_{\mu}) \quad (3-2)$$

kde: α – úhel mezi počátkem souřadnic a zkoumaným místem (°); p – počet pólových dvojic (-); Φ_{μ} – úhel mezi vektory satorových a rotorových harmonických stejného řádu (°); F_{mv} a $F_{m\mu}$ – amplitudy MMN v -té, resp. μ -té harmonické (A) [6]

Pro okamžitou hodnotu kolmé složky magnetické indukce ve vzduchové mezeře platí:

$$b(\alpha, t) = [F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, t)] \cdot \Lambda_g(\alpha, t) = b_1(\alpha, t) + b_2(\alpha, t) \quad (3-3)$$

Kde pro jednotlivé složky magnetické indukce platí:

$$b_1(\alpha, t) = F_1(\alpha, t) \cdot \Lambda_g(\alpha, t) = \sum_{v=1}^{\infty} B_{mv} \cdot \cos(v \cdot p \cdot \alpha \pm \omega \cdot t) \quad (3-4)$$

a:

$$b_2(\alpha, t) = F_2(\alpha, t) \cdot \Lambda_g(\alpha, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{m\mu} \cdot \cos(\mu \cdot p \cdot \alpha \pm \omega_{\mu} \cdot t + \Phi_{\mu}) \quad (3-5)$$

Velikost síly působící na jednotku plochy (magnetický tlak) v čase t a v místě charakterizovaném úhlem α $p_r(\alpha, t)$ (N/m²) lze obecně vypočítat na základě následujícího vztahu:

$$p_r(\alpha, t) = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot [b^2(\alpha, t) - b_t^2(\alpha, t)] \quad (3-6)$$

kde: μ_0 – permeabilita vakua (H/m); $b(\alpha, t)$ – kolmá složka magnetické indukce (T); $b_t(\alpha, t)$ – tečná složka magnetické indukce (T) [6]

Jelikož permeabilita oceli je mnohem vyšší než permeabilita vakua, vstupují siločáry magnetického pole prakticky kolmo do statoru a rotoru. Tečná složka magnetické indukce je tak velmi malá a lze ji zanedbat. Tím se výše uvedený vztah upraví na:

$$\begin{aligned} p_r(\alpha, t) &\approx \frac{b^2(\alpha, t)}{2 \cdot \mu_0} = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot [F_1^2(\alpha, t) + F_2^2(\alpha, t)] \cdot \Lambda_g^2(\alpha, t) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot [F_1^2(\alpha, t) \cdot \Lambda_g^2(\alpha, t) + 2 \cdot F_1(\alpha, t) \cdot F_2(\alpha, t) \cdot \Lambda_g^2(\alpha, t) + F_2^2(\alpha, t) \cdot \Lambda_g^2(\alpha, t)] = \\ &= \frac{[b_1(\alpha, t)]^2 + 2 \cdot b_1(\alpha, t) \cdot b_2(\alpha, t) + [b_2(\alpha, t)]^2}{2 \cdot \mu_0} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Z výše uvedeného vztahu vyplývá, že existují 3 skupiny radiálních sil [6]:

1) Součin $[b_1(\alpha, t)]^2$ statorové harmonické řádu v :

$$p_{rv}(\alpha, t) = \frac{B_{mv}^2}{4 \cdot \mu_0} \cdot [1 + \cos(2 \cdot v \cdot p \cdot \alpha \pm 2 \cdot \omega \cdot t)] \quad (3-8)$$

2) Součin $2 \cdot b_1(\alpha, t) \cdot b_2(\alpha, t)$ statorové harmonické řádu v a rotorové harmonické řádu μ :

$$\begin{aligned} p_{rv\mu}(\alpha, t) &= \frac{B_{mv} \cdot B_{m\mu}}{2 \cdot \mu_0} \\ &\cdot \{ \cos[p \cdot \alpha \cdot (v - \mu) \pm (\omega - \omega_{\mu}) \cdot t - \Phi_{\mu}] \\ &+ \cos[p \cdot \alpha \cdot (v + \mu) \pm (\omega + \omega_{\mu}) \cdot t + \Phi_{\mu}] \} \end{aligned} \quad (3-9)$$

3) Součin $[b_2(\alpha, t)]^2$ rotorové harmonické řádu μ :

$$p_{r\mu}(\alpha, t) = \frac{B_{m\mu}^2}{4 \cdot \mu_0} \cdot [1 + \cos(2 \cdot \mu \cdot p \cdot \alpha \pm 2 \cdot \omega_{\mu} \cdot t + 2 \cdot \Phi_{\mu})] \quad (3-10)$$

Ve vztahu (3-8) a (3-10) se vyskytují konstantní složky $B_{mv}^2/(4\mu_0)$ a $B_{m\mu}^2/(4\mu_0)$ – tyto složky nemají pro tvorbu hluku význam a mohou být zanedbány. [6]

V souladu se vztahy (3-8), (3-9) a (3-10) lze pro magnetický tlak psát obecný vztah:

$$p_r(\alpha, t) = P_{mr} \cdot \cos(r \cdot \alpha - \omega_r \cdot t) \quad (3-11)$$

Kde: P_{mr} – amplituda magnetického tlaku (N/m^2); ω_r – úhlová rychlost (s^{-1}); r – řád magnetického tlaku (-) – $r = 0; 1; 2; 3 \dots$ [6]

Radiální síly obíhají okolo statorového svazku s frekvencí f_r . Pokud do výše uvedeného vztahu dosadíme $r = 0$, tak přejde do tvaru:

$$p_0 = P_{mr=0} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3-12)$$

Tlak je v tomto případě po celém obvodu statoru stejný a mění se s časem. Takový tlak začne způsobovat deformace statorového svazku odpovídající tvarovému módu s řádem $m = 0$ dle Obr. 2-1. Pokud dále bude frekvence této síly odpovídat vlastnímu kmitočtu tohoto tvarového módu, vznikne rezonance. Stejným způsobem lze postupovat i pro vyšší řády sil. [6]

3.4 Frekvence a řády radiálních magnetických sil

3.4.1 Síly vzniklé v důsledku statorových harmonických

Frekvence radiální magnetické síly odpovídá dvojnásobku síťového kmitočtu, tedy:

$$f_r = 2 \cdot f \quad (3-13)$$

Pro řád r platí:

$$r = 2 \cdot v \cdot p = 2 \cdot (k \cdot Q_s \pm p) \quad (3-14)$$

kde v vypočteme jako:

$$v = k \cdot \frac{Q_s}{p} \pm 1 \quad (3-15)$$

kde: Q_s – počet statorových drážek (-); $k = 0; 1; 2; 3 \dots$
[6]

3.4.2 Síly vzniklé v důsledku interakce statorových a rotorových harmonických

Pro úhlovou rychlost statorových harmonických platí:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (3-16)$$

Pro úhlovou rychlost rotorových drážkových harmonických platí:

$$\omega_\mu = \omega \pm k \cdot Q_r \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{p} \cdot (1 - s) \right] = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left[1 \pm k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-17)$$

Pro úhlovou rychlost radiálních sil vzniklých interakcí statorových a rotorových harmonických platí:

$$\omega_r = \omega \pm \omega_\mu = \omega \pm \omega \pm k \cdot Q_r \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-18)$$

Pro frekvence radiálních sil tedy platí:

$$f_r = f \cdot k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \quad (3-19)$$

a:

$$f_r = f \cdot \left[k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \pm 2 \right] \quad (3-20)$$

kde: Q_r – počet rotorových drážek (-); s je skluz (-) základní harmonické:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (3-21)$$

kde: n – otáčky rotoru (min^{-1}); pro synchronní otáčky n_s (min^{-1}) platí známý vztah:

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p} \quad (3-22)$$

Pro řády těchto sil platí:

$$r = (v \pm \mu) \cdot p = k \cdot Q_s \pm k \cdot Q_r \pm 2 \cdot p \quad (3-23)$$

kde v se vypočte podle vztahu (3-15) a pro μ platí:

$$\mu = k \cdot \frac{Q_r}{p} \pm 1 \quad (3-24)$$

[6]

3.4.3 Síly vzniklé v důsledku rotorových harmonických

Pro úhlovou rychlost radiálních magnetických sil způsobených rotorovými harmonickými platí:

$$\omega_r = 2 \cdot \omega_\mu = 4 \cdot \pi \cdot f \cdot \left[1 \pm k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-25)$$

Pro frekvenci tedy platí:

$$f_r = 2 \cdot f \cdot \left[1 \pm k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-26)$$

Pro řády sil platí:

$$r = 2 \cdot \mu \cdot p = 2 \cdot (k \cdot Q_r \pm p) \quad (3-27)$$

kde μ se opět vypočte dle rovnice (3-24). [6]

3.4.4 Síly vzniklé v důsledku excentricity vzduchové mezery

Pro frekvence sil vznikajících v důsledku **statické excentricity** platí:

$$f_{re} = f \cdot \left[2 + k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-28)$$

a:

$$f_{re} = f \cdot k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \quad (3-29)$$

Základní řády těchto sil jsou:

$$r = 1 \qquad a \qquad r = 2 \quad (3-30)$$

Existují i vyšší řády těchto sil:

$$r_{\epsilon} = p \pm 1 \pm (k \cdot Q_r + p \pm 1) \quad (3-31)$$

nebo:

$$r_{\epsilon} = 2 \cdot (p \pm 1) \pm k \cdot Q_r \quad (3-32)$$

a:

$$r_{\epsilon} = k \cdot Q_r \quad (3-33)$$

Síly s řády podle rovnic (3-31); (3-32) a (3-33) lze ale zpravidla zanedbat.

Dále vznikají i síly v důsledku **dynamické excentricity**. Jejich frekvence lze vypočítat dle:

$$f_{r\epsilon} = f \cdot \left[2 \pm \frac{1}{p} \cdot (1 - s) + k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-34)$$

a:

$$f_{r\epsilon} = f \cdot \left[\frac{1}{p} \cdot (1 - s) + k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-35)$$

Řády těchto sil odpovídají rovnicím (3-30); resp. (3-32) a (3-33). [6]

3.4.5 Síly vzniklé v důsledku saturace

Pro úhlovou rychlost rotorových saturačních harmonických platí:

$$\omega_{\mu} = 3 \cdot \omega \pm k \cdot \left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) \right] \quad (3-36)$$

Pro úhlovou rychlost radiálních sil vzniklých v důsledku saturace platí:

$$\omega_{rsat} = \omega \pm \omega_{\mu} \quad (3-37)$$

Z toho lze odvodit vztahy pro frekvence těchto sil:

$$f_{rsat} = f \cdot \left[k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) + 4 \right] \quad (3-38)$$

a:

$$f_{rsat} = f \cdot \left[k \cdot \frac{Q_r}{p} \cdot (1 - s) + 2 \right] \quad (3-39)$$

Pro řády těchto sil platí:

$$r = k \cdot Q_s + k \cdot Q_r + 4 \cdot p \quad (3-40)$$

a:

$$r = k \cdot Q_s + k \cdot Q_r + 2 \cdot p \quad (3-41)$$

[6]

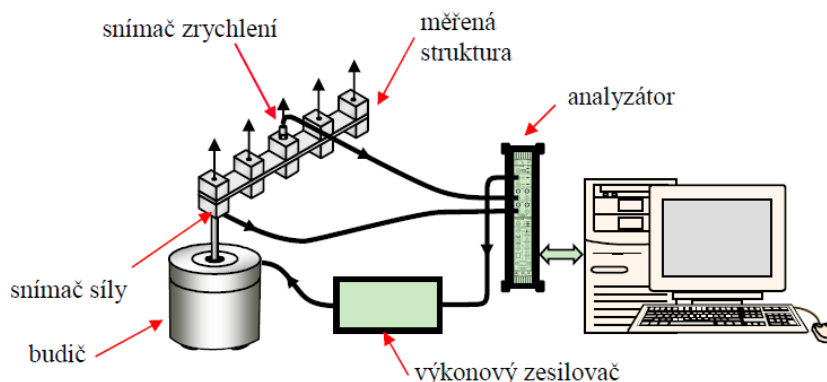
4. Modální analýza

Modální analýza je metoda, která slouží pro zjišťování modálních vlastností měřené struktury. K těmto modálním vlastnostem řadíme vlastní kmitočty, tvarové módy a modální tlumení. Modální analýzu můžeme provádět dvěma základními způsoby. Prvním z nich je teoretická modální analýza, kde modální parametry určujeme výpočtem, nejčastěji pomocí metody konečných prvků (viz kapitola 2). Druhým způsobem je experimentální modální analýza, kdy modální parametry zjišťujeme měřením na reálné soustavě. Často se oba způsoby modální analýzy propojují. Podstata experimentální modální analýzy spočívá v rozkmitání měřené struktury pomocí známých budících sil, a to zpravidla mimo své pracovní prostředí. Následkem působení budící síly (její časový průběh musí být rovněž změřen) vzniká odezva měřené struktury. Analýzou těchto dat lze získat hledané modální parametry. [10]

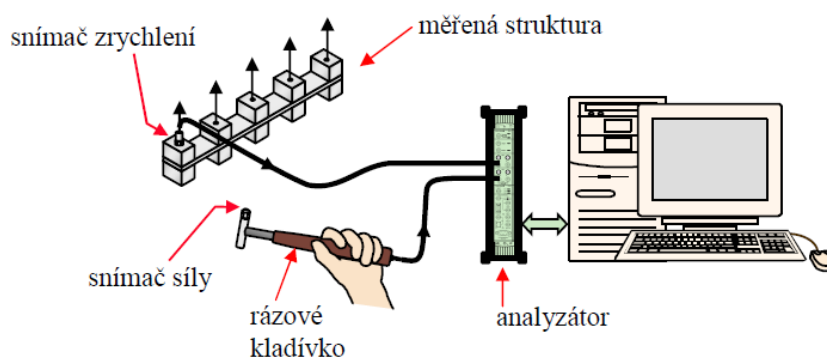
Měřicí systém pro modální analýzu se skládá ze čtyř hlavních částí [10]:

- mechanismus buzení
- snímače pro měření budící síly a odezvy
- analyzátor pro získání požadovaných dat
- výpočetní systém pro zpracování získaných dat

Na Obr. 4-1 a Obr. 4-2 jsou vyobrazeny typická uspořádání měřicí soustavy při buzení dynamickým budičem vibrací, resp. rázovým kladívkem. Význam těchto hlavních částí bude rozebrán v následujících podkapitolách. [10]



Obr. 4-1 – Sestava měření při využití budiče vibrací [10]



Obr. 4-2 – Sestava měření při využití rázového kladívka [10]

4.1 Možnosti uložení měřené struktury

Existují 3 základní možnosti uložení struktury při měření, a to volné uložení, pevné uložení a uložení in situ. [10]

Volné uložení – v ideálním případě tento způsob uložení měřené struktury nevytváří žádnou vazbu s okolím. V praxi se tento způsob uložení dá zajistit umístěním struktury na velmi měkkou podložku, jako je například molitan. Další možností je těleso zavěsit na měkké pružiny. Vlivem tohoto uložení může dojít ke změnám hodnot tlumení jednotlivých tvarových módů. Jestliže má měření za cíl zjištění přesných hodnot tlumení, lze tento vliv zmenšit rozmístěním závěsů do tzv. uzlových bodů (v těch nedochází k žádnému pohybu). Tyto uzlové body má však každý tvarový mód jinde, proto by bylo nutné měřit každý mód odděleně s různým umístěním závěsů. Tento druh uložení je ze všech nejjednodušší a je zvláště vhodný v případě, kdy chceme porovnávat modální parametry získané měřením a výpočtem. [10]

Pevné uložení – tento druh uložení se vyznačuje spojením některých bodů měřené struktury se zemí. Tím dojde v ideálním případě k jejich plnému znehybnění. Pevné uložení může způsobit velké rozdíly mezi modálními parametry získanými měřením a výpočtem, zejména kvůli nestejným okrajovým podmínkám. Tento způsob uložení rovněž způsobuje velké problémy s opakovatelností měření, jelikož při opětovné montáži struktury na měřicí základnu je velký problém všechny spoje utáhnout stejně, jako při předchozím měření. V důsledku toho může dojít ke změně vlastních kmitočtů jednotlivých tvarových módů až o $\pm 5\%$. [10]

Uložení in situ – při tomto druhu uložení se modální analýza provádí během skutečných provozních podmínek. Uložení in situ se využívá u velmi těžkých struktur, velkých strojů, případně pokud chceme zjistit modální parametry při provozních podmínkách. [10]

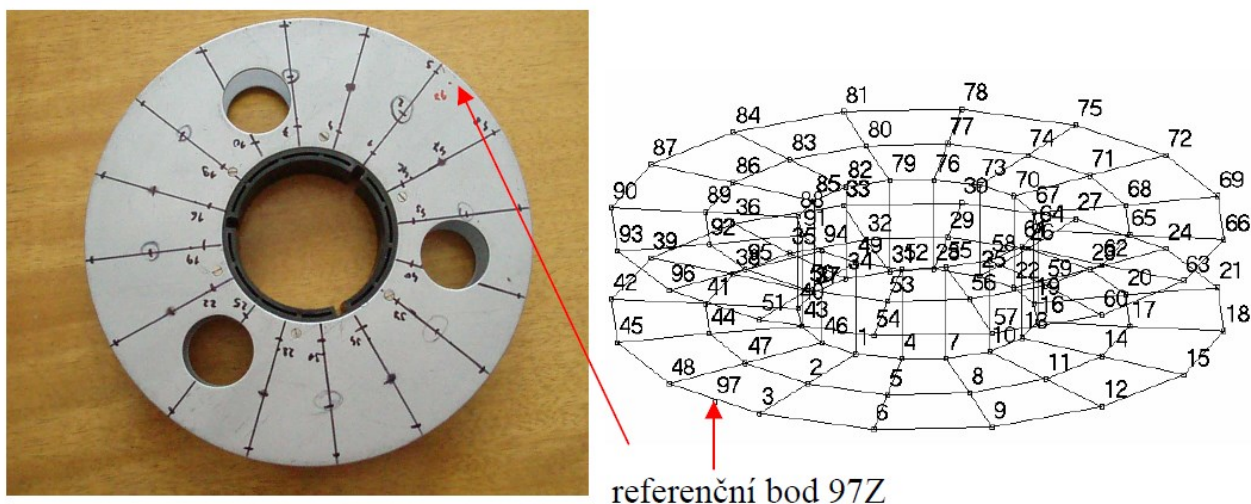
4.2 Volba měřicích bodů

Ještě před samotným měřením je potřebné na struktuře vytvořit síť měřicích bodů. Ve všech těchto bodech bude realizováno samotné měření. Vhodný počet bodů v síti závisí na frekvenčním rozsahu měření. Obecně platí, že čím vyšší je řád módu, tím komplikovanější bude jeho tvar a pro jeho kvalitní znázornění bude potřeba vyšší počet měřicích bodů. Síť by však neměla být až moc hustá, jelikož v důsledku toho dojde ke zbytečnému prodloužení doby měření. Po nakreslení měřicích bodů na strukturu je potřebné stejnou síť vytvořit ve vhodném softwaru určeném pro modální analýzu. [10]

Dále je nutné určit referenční bod, kde bude trvale umístěn akcelerometr (případně kde bude struktura buzena rázovým kladívkem). Tento referenční bod by měl být umístěn tak, aby odezva v něm byla u všech tvarových módů uspokojivě velká pro co nejlepší poměr odezvy a šumu, a zároveň aby struktura byla co nejméně ovlivněna připevněným akcelerometrem. Je evidentní, že oba požadavky jsou protichůdné, jelikož umístění snímače do místa s největší odezvou strukturu ovlivní nejvíce. To, do jaké míry dojde k ovlivnění struktury, závisí především na hmotnosti snímače ve srovnání s hmotností struktury. Jinými slovy, pokud bude hmotnost snímače velmi malá, tak bude tento vliv nepatrný. S ohledem na první výše zmíněný požadavek je nutné referenční bod zvolit tak, aby nebyl zároveň uzlovým bodem některého z tvarových módů, který zrovna hledáme. Pokud by se tak stalo,

tak by naměřená odezva hledaného tvarového módu byla nulová a vůbec by nedošlo k jeho zachycení. Tomuto jevu se lze vyhnout například tak, že budeme předem přibližně znát tvarové módy kupříkladu z výpočtového modelu. Pokud tvarové módy přibližně neznáme, nebo není možné je odhadnout, lze před začátkem měření otestovat více rozdílných referenčních bodů a sledovat počet rezonancí. Jestliže v některém bodě jedna z rezonancí zmizí, tak se jedná o uzlový bod tomu odpovídajícího tvarového módu. Tento bod potom nemůže být použit jako referenční. [10]

Na Obr. 4-3 je znázorněn příklad sítě bodů na měřené struktuře a tomu odpovídající geometrický model vytvořený v softwaru pro modální analýzu.



Obr. 4-3 – Příklad geometrického modelu pro modální analýzu [11]

4.3 Buzení měřené struktury

Mechanismy pro buzení měřené struktury lze rozdělit na dvě základní skupiny [10]:

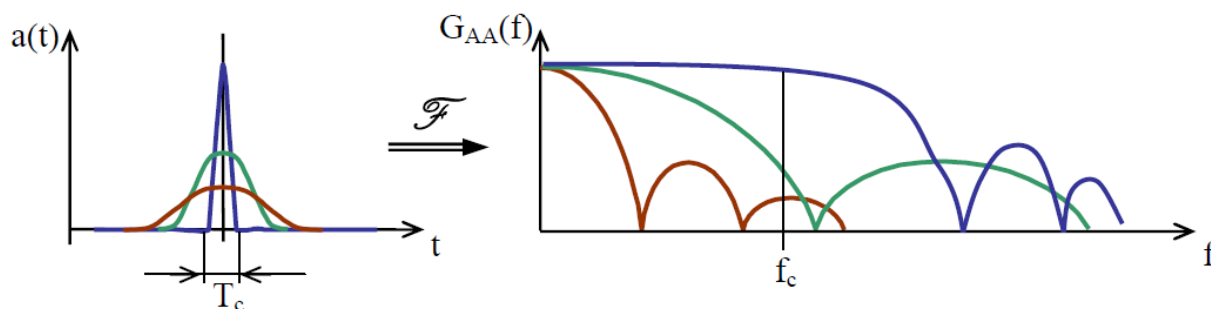
- 1) Rázové buzení
 - pomocí rázového kladívka
 - uvolněním z deformované pozice
 - úderem padající hmotou
 - kyvadlovým rázovadlem
- 2) Buzení pomocí budiče vibrací
 - pomocí elektromagnetického budiče
 - pomocí elektrohydraulického budiče
 - pomocí mechanického budiče (excentricky uložená rotující hmota)

Dále budou rozebrány jen nejčastěji používané způsoby, a to buzení pomocí rázového kladívka a buzení pomocí elektromagnetického budiče. [10]

4.3.1 Buzení pomocí rázového kladívka

Použití rázového kladívka je nejjednodušší a nejrychlejší způsob pro buzení měřené struktury. Modální kladívko je konstrukčně složeno z rukojeti, hlavy, hrotu a snímače síly. Ke každému kladívku se obvykle dodává sada hrotů s různou tuhostí a dále přídavné hmoty pro ovlivnění frekvenčního rozsahu měření a velikosti působící síly. Snímač síly měří velikost síly, která působí na strukturu. [10]

Rozpětí frekvencí, které lze účinně vybudit kladívkem, je určeno tuhostí povrchu struktury a hrotu a dále hmotností hlavy kladívka. Po nárazu hrotu kladívka do měřené struktury dojde ke vzniku silového impulsu, jehož tvar odpovídá půlperiodě funkce sinus. Tento impuls a jeho frekvenční spektrum pro 3 různé tvrdosti hrotu (modrá křivka pro nejtvrdší hrot – v praxi z kovu, červená křivka pro nejměkčí hrot – v praxi například gumový) jsou znázorněny na Obr. 4-4. Ve frekvenčním spektru je znázorněna mezní frekvence f_c (platí pro modrou křivku), která je závislá na délce trvání impulsu T_c . Tato frekvence v podstatě určuje použitelný frekvenční rozsah měření. Délka trvání silového impulsu je do značné míry závislá na tuhosti obou povrchů a hmotnosti hlavy kladívka. Čím větší je tuhost obou povrchů, tím menší bude doba trvání silového impulsu a tím vyšší bude mezní frekvence f_c . Dále platí, že menší hmotnosti hlavy kladívka odpovídá vyšší mezní frekvence. Při měření by se měl používat nejměkčí možný hrot, aby všechna vstupní energie byla dodána ve frekvenčním pásmu, které nás zajímá. Pokud použijeme příliš tuhý hrot, dojde k tomu, že dodaná energie vybudí kmitání i nad frekvenčním pásmem, které nás zajímá, na úkor kmitání ve zkoumaném pásmu. [10]



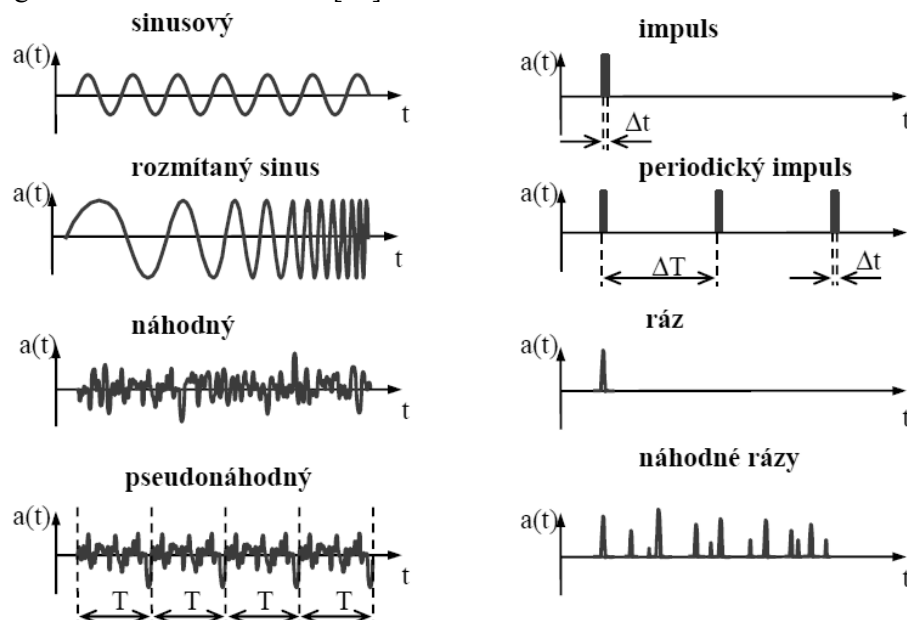
Obr. 4-4 – Vliv použitého hrotu na silový impuls a jeho spektrum [10]

Rázové buzení pomocí kladívka má samozřejmě i nevýhody. Špičková hodnota působící síly má zpravidla velmi vysokou hodnotu. V důsledku toho může dojít k místnímu poškození měřené struktury. Dále může dojít k vybudení nelineárního chování struktury. Rovněž činitel výkmitu je vysoký a regulace frekvenčního pásma buzení je omezená (jen pomocí tuhosti hrotu a hmotností hlavy kladívka). [10]

4.3.2 Buzení pomocí elektromagnetického budiče vibrací

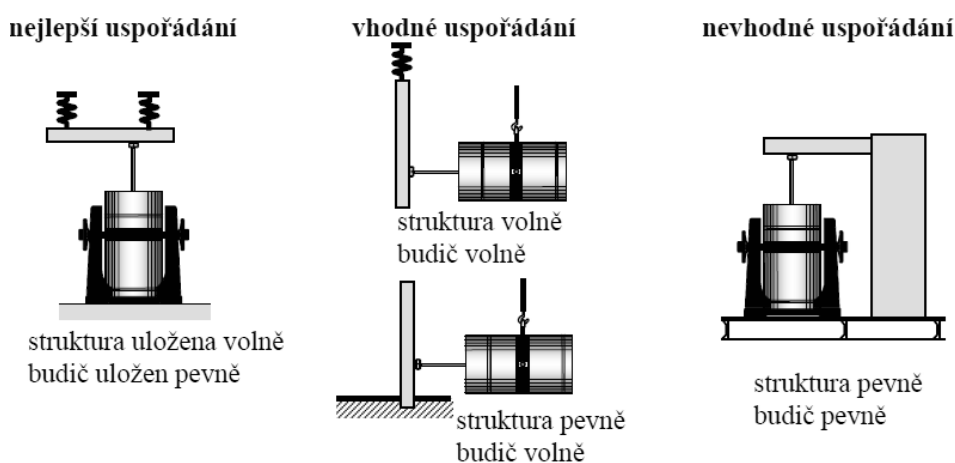
Elektromagnetický budič vibrací funguje tak, že vstupní signál převádí na střídavé magnetické pole. V něm je umístěna cívka připojená k poháněcí části zařízení a ke struktuře. Často se frekvence a amplituda budící síly řídí nezávisle na sobě, což zajišťuje větší pružnost ovládání. To je užitečné hlavně v případě, kdy je při rezonanci potřeba měnit úroveň buzení. Podobně jako u rázového buzení kladívkem platí, že větší elektromagnetický budič vibrací je schopen vytvořit větší sílu, ale zároveň se zmenšuje frekvenční rozsah měření. Tento frekvenční rozsah je omezený vlastním kmitočtem samotného budiče. [10]

Při buzení elektromagnetickým budičem vibrací se využívají budící signály znázorněné na Obr. 4-5. Tyto druhy budících signálů bývají obvykle dostupné v generátoru signálů, který bývá součástí analyzátoru. Signál vytvořený generátorem je výkonovým zesilovačem zesílen a přiveden do elektromagnetického budiče vibrací. [10]



Obr. 4-5 – Druhy budících signálů [10]

U elektromagnetického budiče je nutné upevnění poháněcí základny budiče k měřené struktuře, většinou s vestavěným snímačem síly. Je však nutné dodržovat určité zásady, zejména nesmí dojít k zavedení nechtěného buzení a k neuvážené modifikaci struktury. Nejvýhodnější možností je připevnění budiče ke struktuře pomocí tzv. budící tyčky, která je tuhá ve směru působení budící síly a zároveň je pružná v ostatních směrech. Tato tyčka se většinou vyrábí z pružinového drátu o délce zhruba 5 cm. Je ale potřeba dbát na to, aby tyčka nebyla až příliš dlouhá a pružná, protože by do měření zaváděla své vlastní rezonance, které by bylo obtížné odlišit od pravých dat. Různé možnosti připojení budiče ke struktuře jsou znázorněny na Obr. 4-6. Připojení s pevně uloženou strukturou i budičem není vhodné, jelikož v důsledku reakčních sil v uložení budiče vzniká přídavné buzení, které ale snímač síly nezaznamenává. [10]



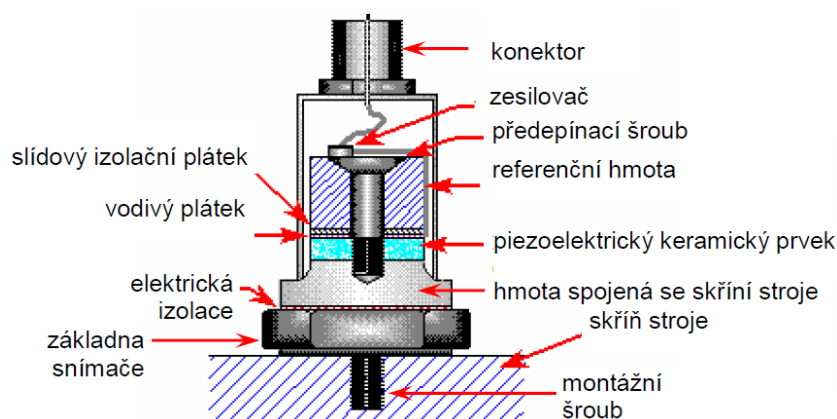
Obr. 4-6 – Možnosti připojení budiče k měřené struktuře [10]

4.4 Snímače pro měření odezvy

Pro měření odezvy lze použít snímače výchylky, snímače rychlosti a snímače zrychlení. Dále budou popsány jen nejčastěji používané snímače zrychlení neboli akcelerometry. [12]

4.4.1 Princip funkce akcelerometru

Akcelerometr využívá tzv. piezoelektrický jev – při deformování destičky z piezoelektrického materiálu vzniká elektrický náboj. Jeho velikost je přímo úměrná deformaci. Destička z piezoelektrického materiálu je uložena mezi dvěma hmotami. První z nich je pružně uložená setrvačná referenční hmota. Druhá hmota je spojená se skříní stroje a pouzdem snímače. Vlastní kmitočet snímače, který omezuje frekvenční rozsah měření, je značně vysoký. Jednotlivé části snímače zrychlení jsou viditelné na Obr. 4-7. [12]



Obr. 4-7 – Snímač zrychlení [12]

Při kmitání měřené struktury kmitá rovněž hmota, která je pevně spojená s pouzdem akcelerometru. Setrvačná hmota zůstává v klidu. Díky tomu dochází k deformaci piezoelektrické destičky a ke vzniku tomu odpovídajícího elektrického náboje. Při frekvenci kmitání nižší, než je spodní frekvenční mez snímače, kmitá spolu pouzdem i setrvačná referenční hmota a nedochází tak k deformaci piezoelektrického prvku a ke vzniku náboje. Horní frekvenční mez snímače bývá přibližně ve třetině jeho vlastního kmitočtu. Obecně platí, že čím větší je referenční hmota snímače, tím větší je i citlivost (zpravidla se uvádí v mV/g). Naopak vlastní kmitočet snímače bude nižší. [12]

Díky konstrukci snímače zrychlení je možné jeho upevnění na měřenou strukturu v jakékoliv poloze, jelikož systém hmota/pružina je dostatečně tuhý. Piezoelektrická destička nesmí být namáhána jinak než měřeným kmitáním. Je proto nutné, aby místo pro připevnění akcelerometru bylo hladké a ploché, jinak by při montáži mohlo dojít ke zdeformování základny snímače a tím ke zkrácení signálu. Nežádoucí deformace základny mohou být způsobeny i teplotními změnami a příliš velkým utahovacím momentem (při upevnění šroubem). [12]

Díky své konstrukci mají akcelerometry velkou trvanlivost a spolehlivost a není vyžadována častá kontrolní kalibrace jako u snímačů rychlosti. K dalším výhodám patří snadná instalace na měřenou strukturu a použitelnost v širokém frekvenčním rozsahu (0,1 Hz – 30 kHz). [12]

4.4.2 Montáž akcelerometru na strukturu

Správná montáž snímače zrychlení na měřenou strukturu je velmi důležitá. Akcelerometr totiž měří jen to, co se děje s ním samým. Správným upevněním akcelerometru zajistíme to, aby se s ním dělo totéž, co s měřenou strukturou. Pokud bude upevnění provedeno nesprávným způsobem, může dojít ke znehodnocení naměřených hodnot a ke znatelnému omezení použitelného frekvenčního pásma akcelerometru. Způsob upevnění je třeba volit tak, aby snímač měřil správně ve frekvenčním pásmu, které nás zajímá. Nejčastěji se používá uchycení pomocí šroubu, lepidla, oboustranné lepicí pásky, magnetu, včelího vosku nebo dotekové jehly. Podrobnější informace k upevňování akcelerometrů je možné najít v normě ČSN ISO 5348 [12]

Šroub – Tento způsob uchycení je nejvíce spolehlivý, jelikož dojde jen k zanedbatelnému snížení frekvenčního rozsahu akcelerometru. Je nutné, aby plocha pod základnou akcelerometru byla čistá a rovná, aby snímač dosedal na tuto plochu celou základnou. Dále je nutné, aby díra pro šroub byla kolmá k povrchu struktury a aby byl použit správný závit (u snímačů často bývá jiný druh závitu než metrický). Tyto přísné požadavky bývá obtížné dodržet. Někdy se tak používají lepené podložky z nerezové oceli se závitem pro šroub. [12]

Lepidlo – Při použití vhodného lepidla (např. Loctite Depend, Loctite Liquid Metal) bude frekvenční rozsah akcelerometru rovněž ovlivněn zanedbatelně, je ale nutné, aby plocha pro přilepení snímače byla čistá a zdrsňená. Při použití nevhodného lepidla s obsahem měkké doplňkové složky pro vyrovnání nerovností by došlo k velkému snížení použitelného frekvenčního rozsahu. Rovněž je potřeba, aby při měření nedošlo k překročení teploty, při které dochází k měknutí lepidla. [10]

Oboustranná lepicí páska – Tento způsob upevnění je rychlý, ale spolehlivost je nižší a kvůli tomu se nejedná o běžně používaný způsob. [12]

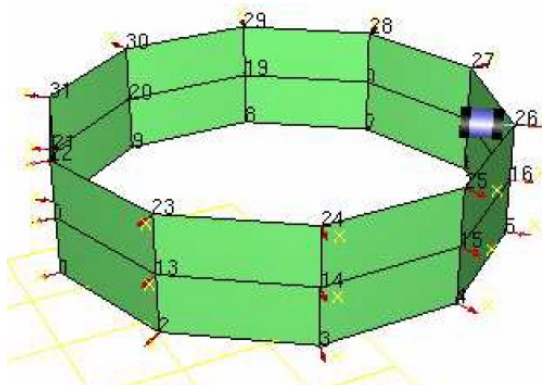
Magnet – Upevnění pomocí magnetu je často používané, jelikož se jedná o velmi rychlý způsob. Povrch struktury samozřejmě musí být feromagnetický. Opět musí být zajištěn kvalitní povrch měřené struktury – musí být rovný, bez okují, barvy atd. Obvykle se používají magnety na bázi vzácných zemin – například neodymové magnety. [12] Při použití magnetického ukotvení je nutno dbát velké opatrnosti při přikládání akcelerometru ke struktuře. Je nutné magnet opatrně umístit na strukturu nejprve přes hranu a pak pozvolna přiložit celou plochou. Povrch struktury i magnetu je totiž tvrdý a při prudkém nárazu by došlo ke vzniku extrémně vysokých hodnot zrychlení, což by mohlo vést v krajním případě ke zničení akcelerometru. Rovněž by mohlo dojít k poškození křehkého magnetu. [13]

Včelí vosk – Jedná se o často používaný a rychlý způsob upevnění. Je využíván hlavně pro laboratorní měření s menšími snímači. Použitím vosku dojde k mírnému omezení frekvenčního rozsahu snímače. Rovněž je třeba brát v úvahu maximální použitelnou teplotu okolo 40°C. [12]

Doteková jehla – Tento způsob se dá použít jen pro orientační měření do cca 1 kHz. [12]

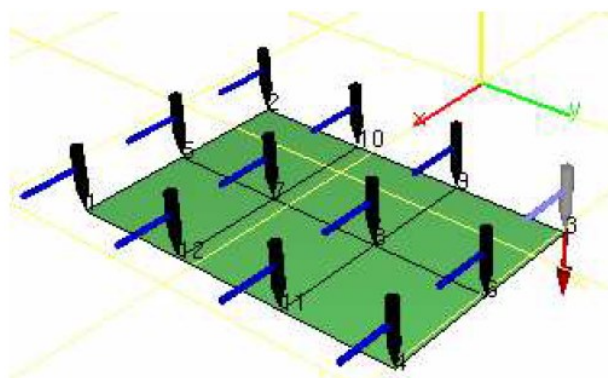
4.5 Měření

Jakmile máme připravenou síť měřicích bodů na struktuře a geometrický model, můžeme začít se samotným měřením. Při buzení pomocí elektromagnetického budiče je budič i se snímačem síly umístěn v referenčním bodě. Akcelerometr se postupně přemisťuje do všech měřicích bodů. Jestliže snímaných stupňů volnosti je méně než počet kanálů analyzátoru, tak lze získat odezvu ve všech požadovaných stupních volnosti záraz. Princip měření je znázorněn na Obr. 4-8 a Obr. 4-9 [10]



Obr. 4-8 – Měření při buzení struktury budičem [10]

Při buzení pomocí kladívka existují 2 možnosti. První z nich je umístění akcelerometru v referenčním bodě a následovně postupné buzení struktury ve všech bodech. Někdy má měřená struktura složitý tvar a měřicí body jsou těžko dostupné. V tomto případě je snazší do těchto bodů umístit snímač zrychlení místo provedení úderu. Buzení kladívkem tak bude prováděno stále v referenčním bodě a akcelerometr se bude přesouvat do jednotlivých bodů. Podobně to bude, pokud má být pro měření odezvy použit trojosý snímač, který nelze použít jako referenční, jelikož referenční je jen jeden stupeň volnosti. Před samotným měřením je vhodné provést kontrolu reciprocity – při buzení v místě **i** a odezvě v místě **j** by naměřená frekvenční přenosová funkce měla být stejná, jako při buzení v místě **j** a odezvě v místě **i**. [10]



Obr. 4-9 – Měření při buzení struktury rázovým kladívkem [10]

5. Praktické provedení modální analýzy

5.1 Popis zvoleného řešení

Modální analýza byla prakticky provedena na 5 statorových svazcích, jelikož se jedná o součást, která je významným zdrojem vibrací při chodu asynchronního motoru. Cílem bylo zjistit měřením hodnoty vlastních kmitočtů jednotlivých tvarových módů u všech uvedených svazků. Pro provedení modální analýzy byly zvoleny tyto svazky:

- Svazek 1 – holý statorový svazek nepřekládaný
- Svazek 2 – holý statorový svazek překládaný
- Svazek 3 – statorový svazek s vinutím bez impregnace
- Svazek 4 – statorový svazek s jednou impregnovaným vinutím
- Svazek 5 – statorový svazek s dvakrát impregnovaným vinutím

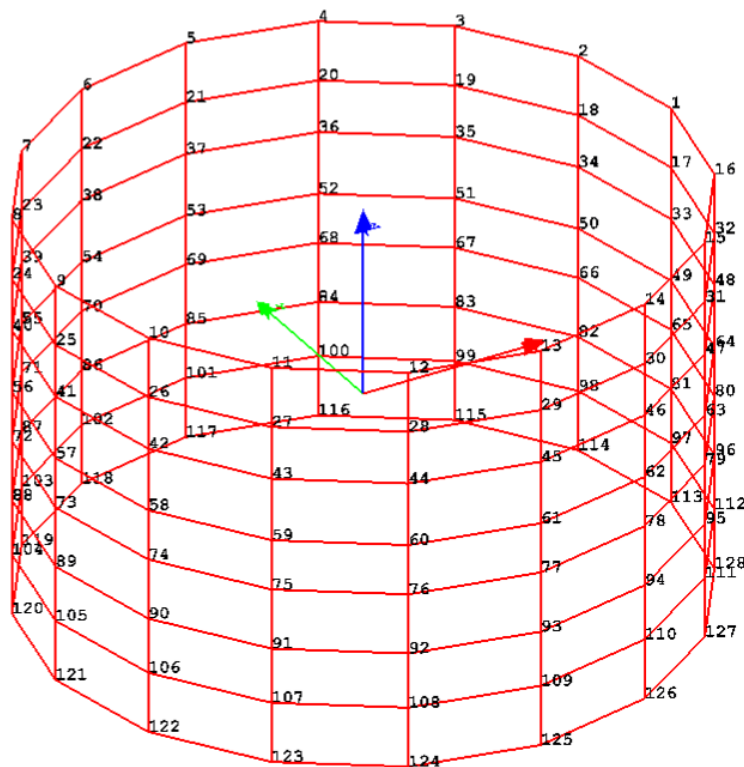
Hlavním cílem měření bylo zjistit rozdíly mezi jednou a dvakrát naimpregnovaným navinutým svazkem a dále mezi překládaným a nepřekládaným svazkem bez vinutí. Na Obr. 5-1 jsou znázorněny všechny výše uvedené statorové svazky.



Obr. 5-1 – Statorové svazky

5.2 Geometrický model

Na všech statorových svazcích byla nakreslena síť měřicích bodů, kterých bylo celkem 128 – konkrétně 16 bodů rovnoměrně rozmístěných po vnějším obvodu svazku v celkem 8 řadách. Bylo třeba zvolit dostatečně velký počet bodů, aby šlo jednotlivé módy snadno identifikovat. Na základě této skutečnosti byl v softwaru μ -Remus vytvořen geometrický model (stejný pro všechny svazky) viditelný na Obr. 5-2.



Obr. 5-2 – Geometrický model svazku v programu μ -Remus

5.3 Měření

Pro měření bylo použito modální kladívko PCB Piezotronics 086C04, akcelerometr PCB Piezotronics 356A16 a analyzátor Sinus Apollo light, vše viditelné na Obr. 5-3. Mezi základní parametry použitého zařízení patří [13], [14]:

- **Modální kladívko** – Citlivost ($\pm 15\%$): 1,1 mV/N; Rozsah měření: ± 4448 N; Rezonanční frekvence: ≥ 22 kHz; Nelinearita: $\leq 1\%$; Napětí: 20 až 30 V DC; Proud: 2 až 20 mA; Výstupní impedance: $< 100\ \Omega$
- **Akcelerometr** – Citlivost ($\pm 10\%$): 10,2 mV/(m/s²); Rozsah měření: ± 490 m/s²; Frekvenční rozsah ($\pm 10\%$): 0,3 až 6000 Hz; Rezonanční frekvence: ≥ 25 kHz; Nelinearita: $\leq 1\%$; Pracovní rozsah teplot: -54 až +80 °C; Napětí: 20 až 30 V DC; Proud: 2 až 20 mA
- **Analyzátor** – Počet kanálů: 16; Rozlišení: 24 bitů; Šířka pásma: 0 až 20 kHz; Pracovní rozsah teplot: -10 až +50 °C



Obr. 5-3 – Zařízení použité pro měření [13], [14]

Při provedení modální analýzy byl zvolen volný způsob uložení měřených svazků. Konkrétně se jednalo o uložení na 2 měkké molitanové podložky položené na sobě. Toto uložení bylo voleno pro svou jednoduchou realizaci a snadné srovnání s výsledky získanými pomocí numerického a analytického výpočtu.

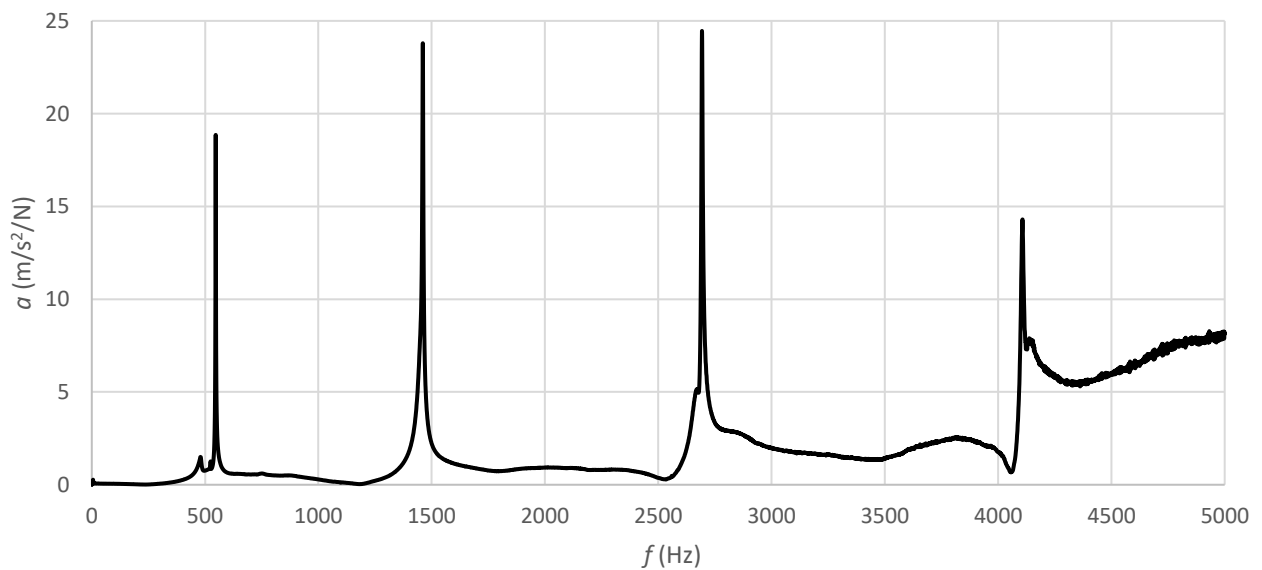
Montáž akcelometru k měřeným svazkům byla realizována pomocí neodymového magnetu, který byl k samotnému snímači přilepen lepidlem. Tento způsob montáže sice není nejlepší možný, ale vzhledem k velkému množství měřicích bodů ($128 \cdot 5$) se jednalo o nejpríjemnější možnost díky rychlosti a jednoduchosti. Dále hmotnost snímače i s magnetem byla mnohem nižší, než hmotnost měřené struktury, čímž nedošlo k jejímu výraznějšímu ovlivnění.

Do jednotlivých bodů vyznačených na svazku byl postupně umísťován akcelometr pro měření odezvy. Buzení rázovým kladívkem bylo prováděno vždy v referenčním bodě pro každou polohu akcelometru. Celkem tedy bylo provedeno 128 úderů kladívkem pro každý svazek. Při měření byl použit kovový hrot kladívka pro co největší frekvenční rozsah. Po správném úderu následovalo vždy uložení dat a posunutí snímače do dalšího bodu. Výsledkem každého úderu jsou 3 frekvenční odezvové funkce (frequency response function – FRF) v příslušném bodě ve směru 3 os. Jedna z těchto

FRF je znázorněná na Obr. 5-5. Na Obr. 5-4 je znázorněna sestava měření. Referenční bod se nachází mezi body 1 a 2.



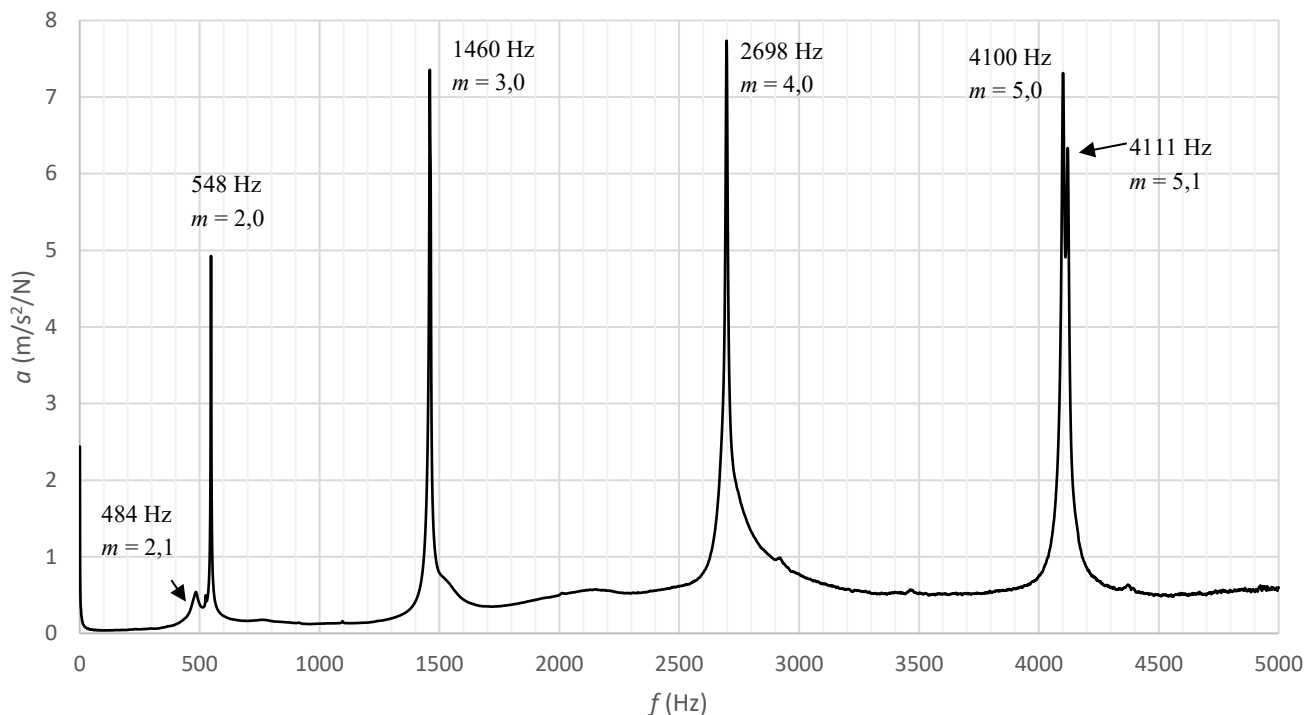
Obr. 5-4 – Sestava měření



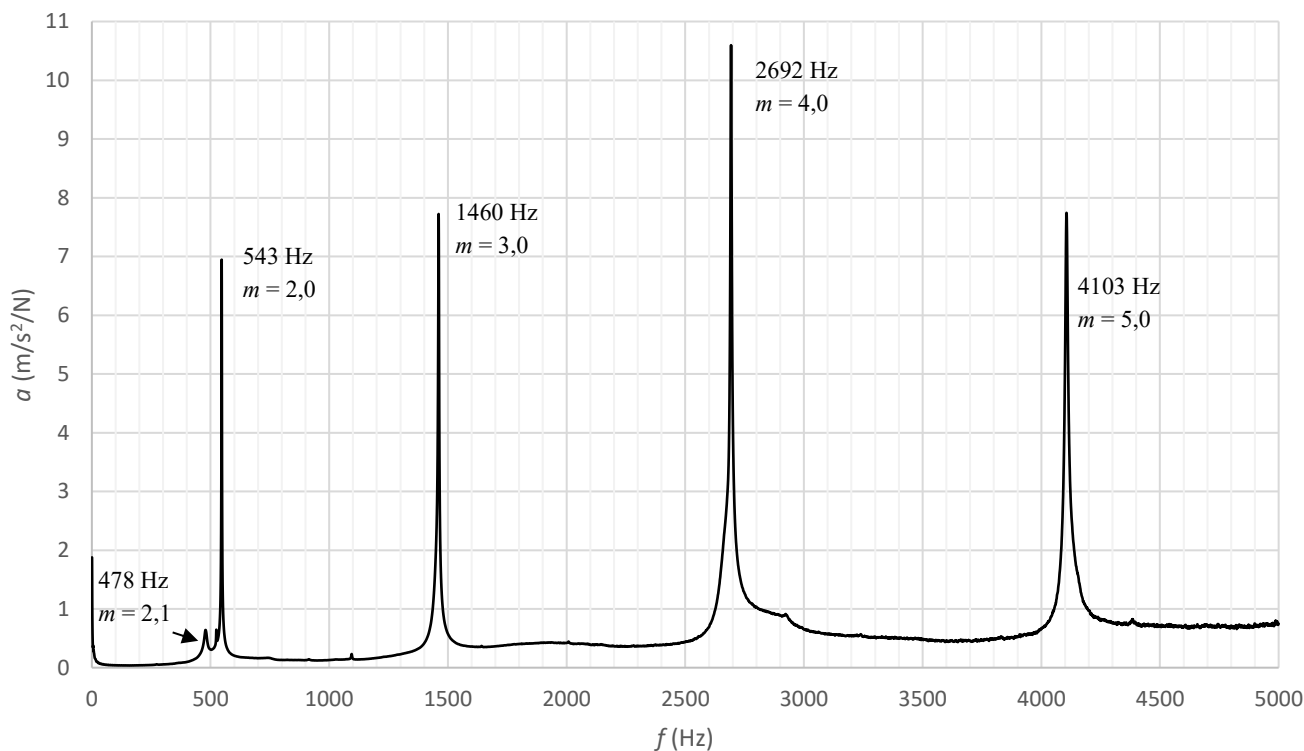
Obr. 5-5 – Příklad FRF v bodě 2 ve směru osy x pro překládaný holý svazek

5.4 Výsledné frekvenční odezvosvé funkce a vlastní kmitočty

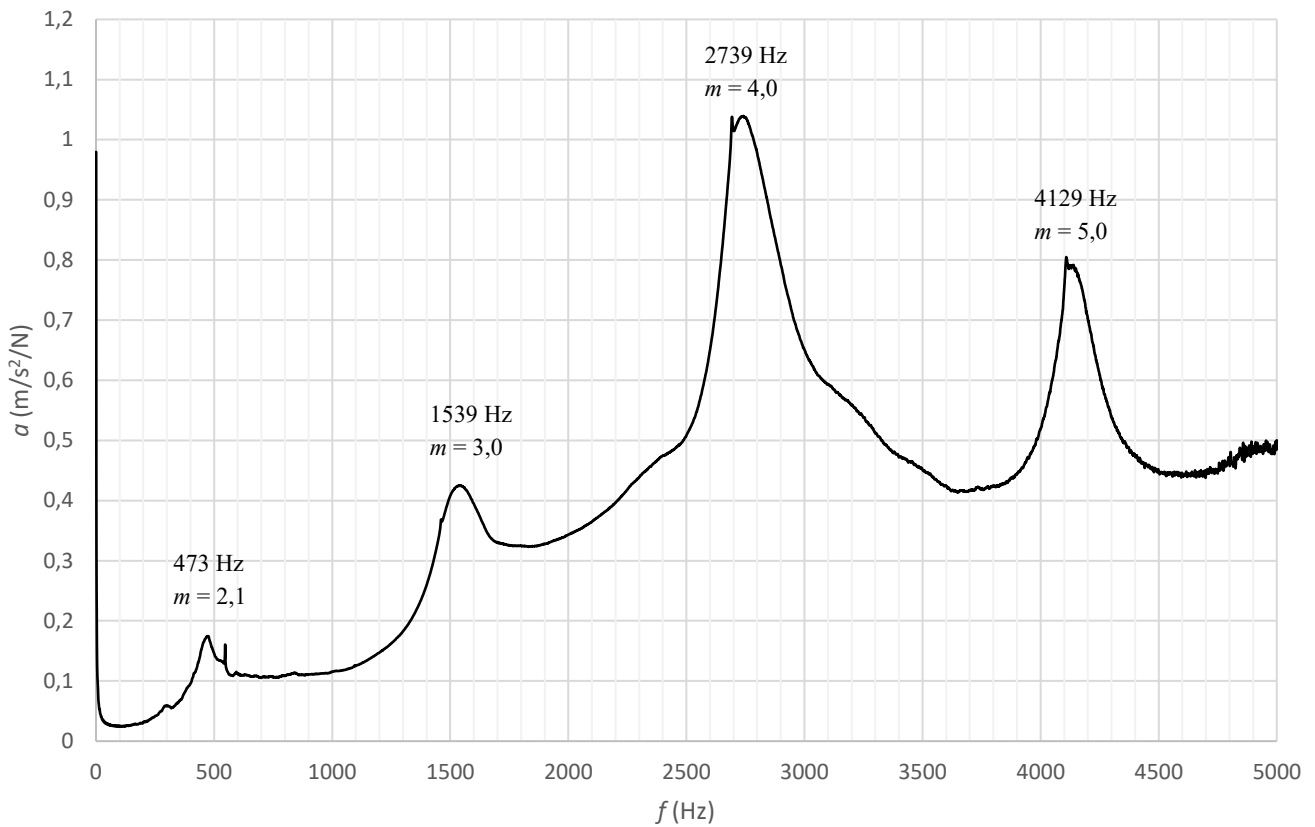
Na Obr. 5-6 až Obr. 5-10 jsou znázorněny výsledné frekvenční odezvosvé funkce zjištěné měřením. Na ose x je vynesena frekvence a na ose y je zrychlení vztažené k jednotkové síle.



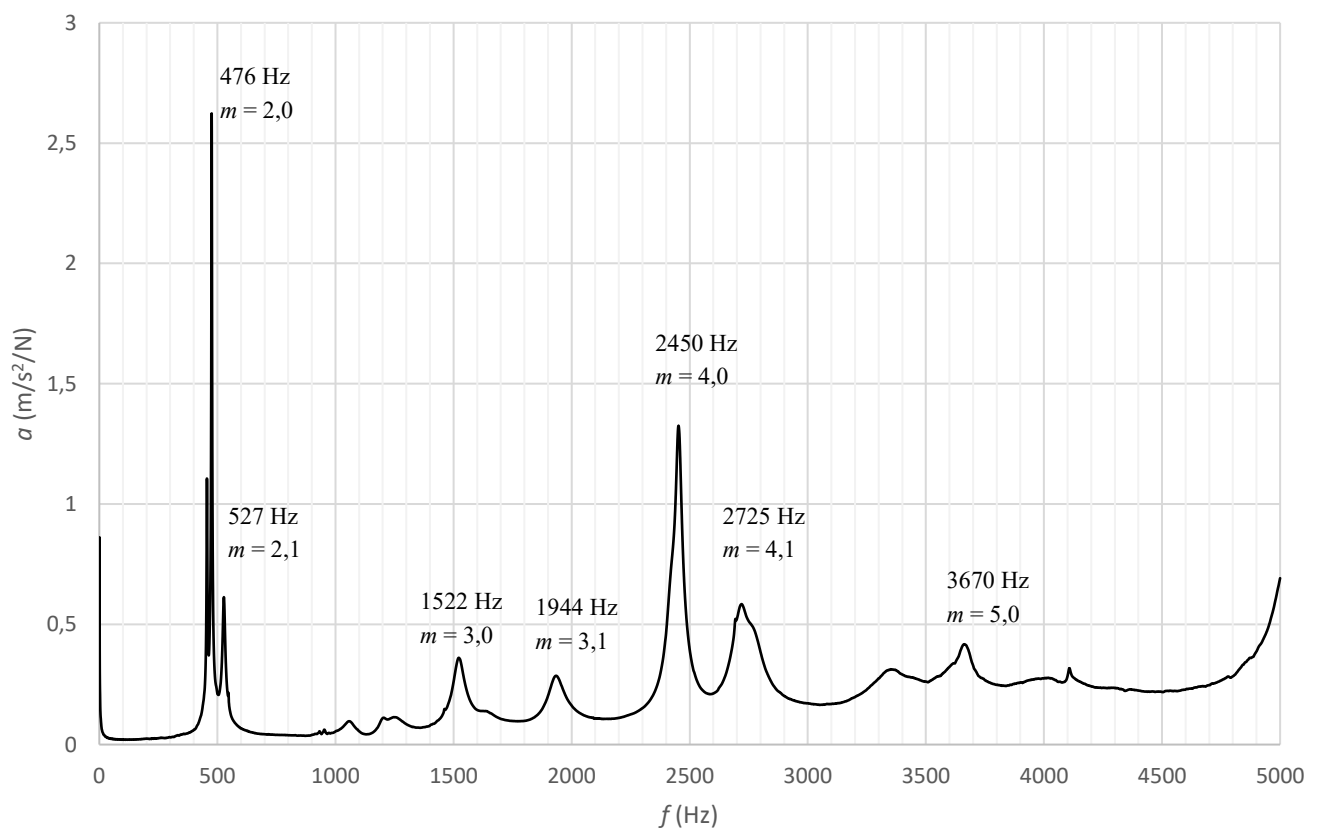
Obr. 5-6 – Výsledná FRF složená ze všech bodů pro holý nepřekládaný svazek



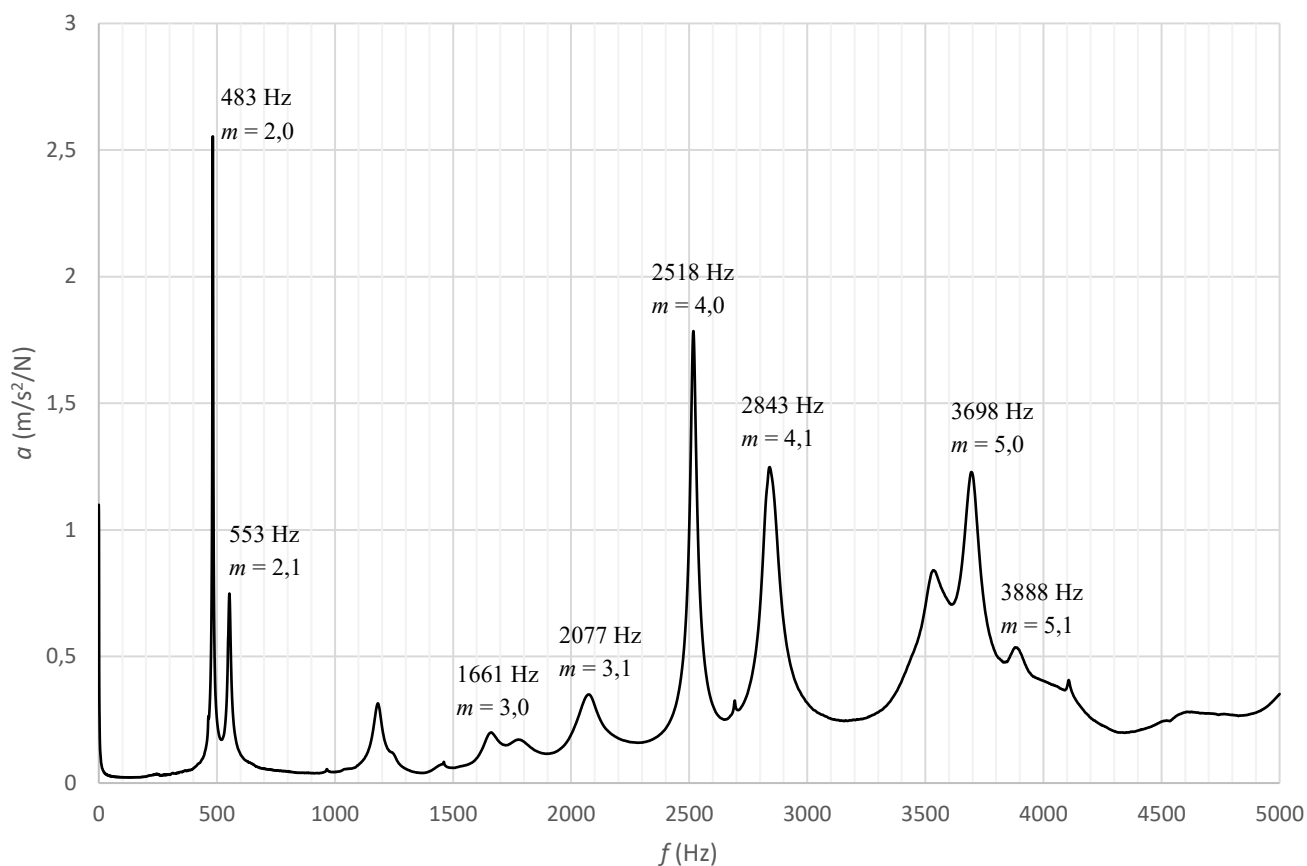
Obr. 5-7 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro holý překládaný svazek



Obr. 5-8 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek bez impregnace



Obr. 5-9 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek jednou impregnovaný

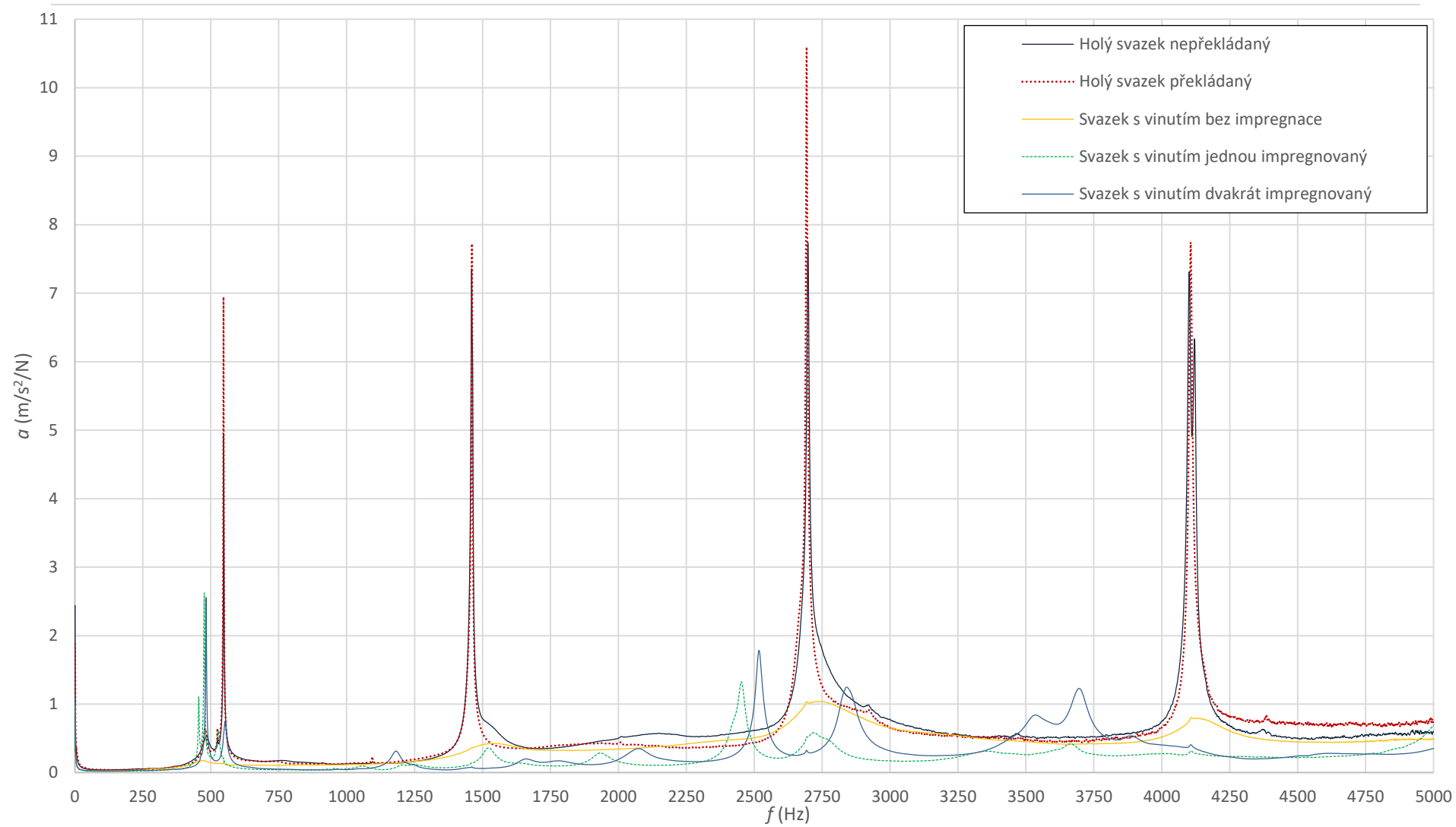


Obr. 5-10 - Výsledná FRF složená ze všech bodů pro navinutý svazek dvakrát impregnovaný

V Tab. 5-1 jsou uvedeny výsledné vlastní kmitočty jednotlivých tvarových módů zjištěných pomocí měření a na Obr. 5-11 jsou srovnány všechny výše uvedené frekvenční odezвовé funkce.

Tab. 5-1 – Změřené vlastní kmitočty

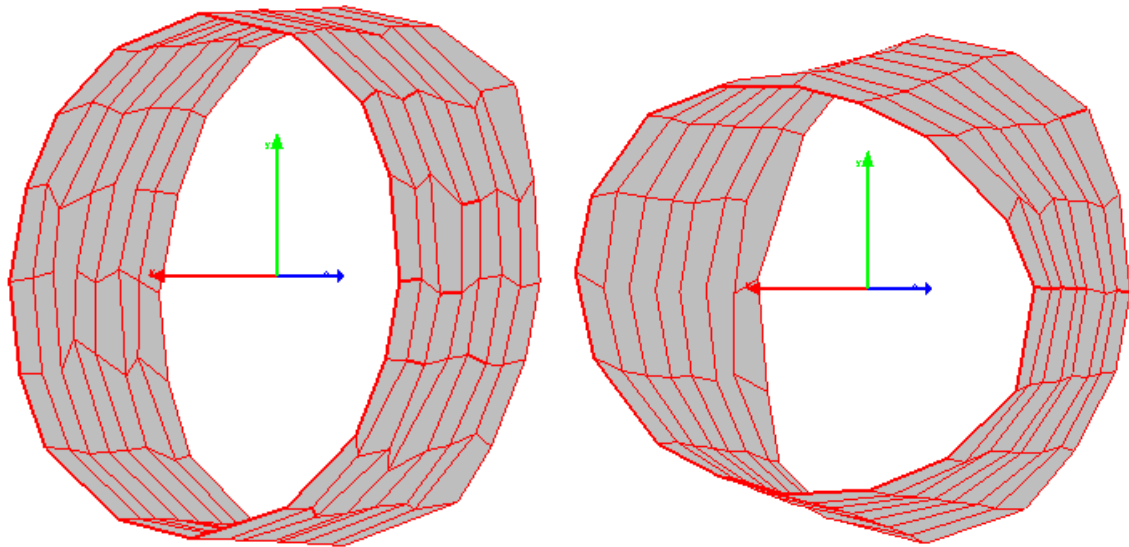
Řád módu m (-)	Svazek 1	Svazek 2	Svazek 3	Svazek 4	Svazek 5
	f_m (Hz)	f_m (Hz)	f_m (Hz)	f_m (Hz)	f_m (Hz)
0	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-
2,0	548	543	-	476	483
2,1	484	478	473	527	553
3,0	1460	1460	1539	1522	1661
3,1	-	-	-	1944	2077
4,0	2698	2692	2739	2450	2518
4,1	-	-	-	2725	2843
5,0	4100	4103	4129	3670	3698
5,1	4111	-	-	-	3888



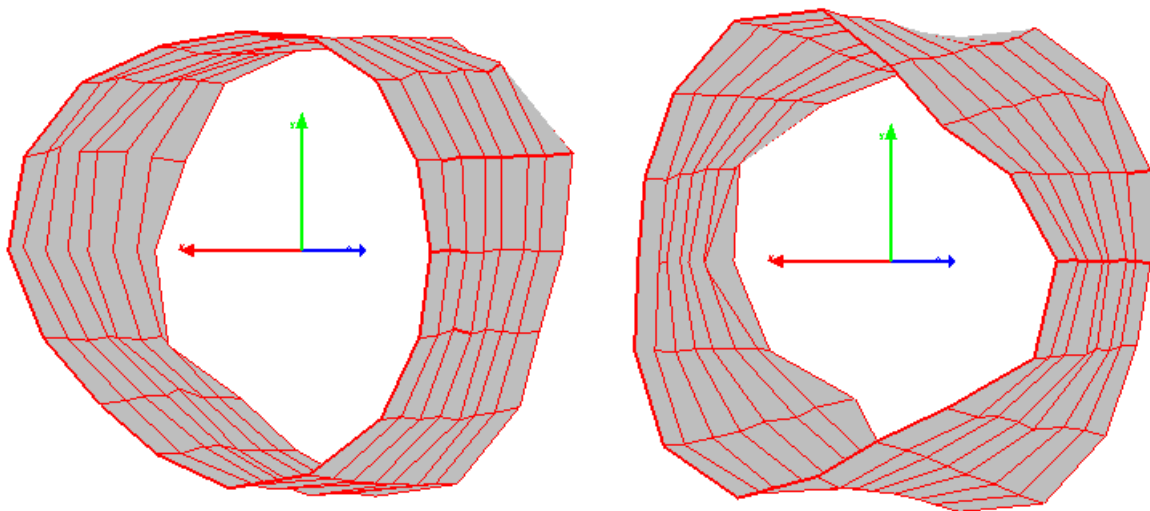
Obr. 5-11 – Srovnání výsledných FRF

5.5 Grafické znázornění zjištěných tvarových módů

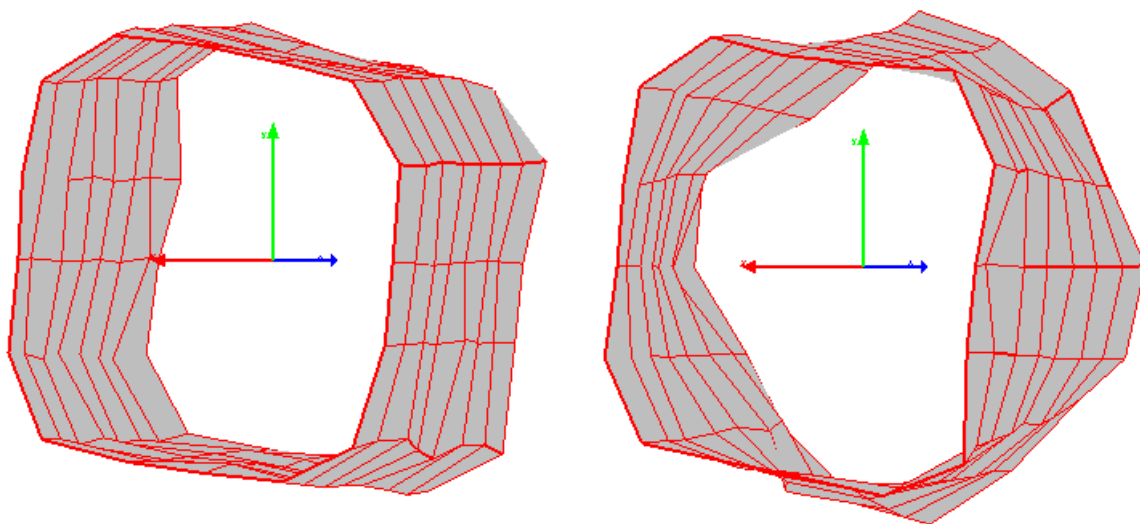
Na Obr. 5-12 až Obr. 5-15 jsou graficky znázorněny tvarové módy zachycené při měření. Tyto módy znázorňují tvar kmitů statorového svazku při rezonanci na daném kmitočtu.



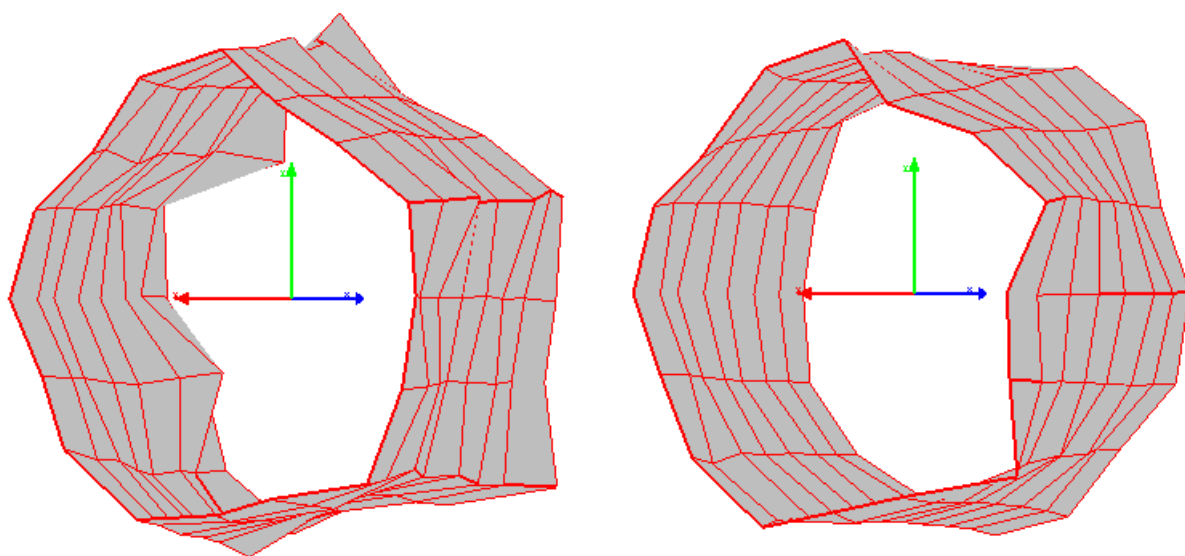
Obr. 5-12 – Tvarové módy řádu $m = 2, 0$ (vlevo) a $m = 2, 1$ (vpravo)



Obr. 5-13 - Tvarové módy řádu $m = 3, 0$ (vlevo) a $m = 3, 1$ (vpravo)



Obr. 5-14 - Tvarové módy řádu $m = 4,0$ (vlevo) a $m = 4,1$ (vpravo)

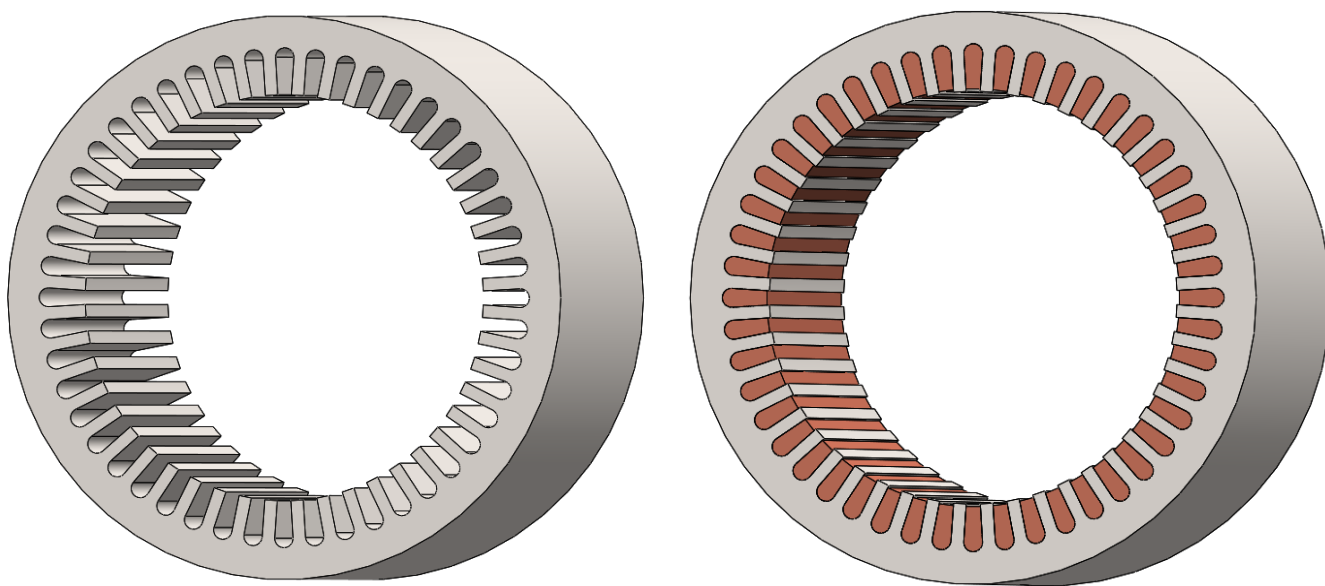


Obr. 5-15 - Tvarové módy řádu $m = 5,0$ (vlevo) a $m = 5,1$ (vpravo)

Výsledky získané měřením budou v následující kapitole využity pro naladění numerického modelu svazku bez vinutí a svazku s vinutím.

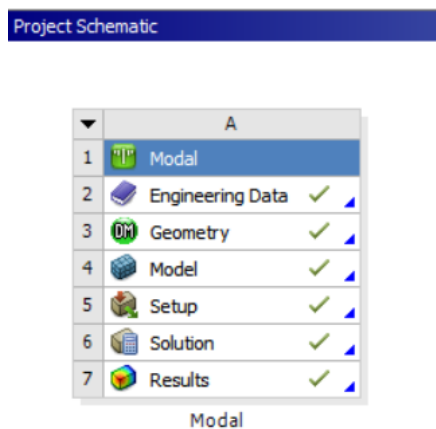
6. Analýza s využitím metody konečných prvků

Modální analýza s využitím metody konečných prvků byla provedena v programu Ansys Workbench 16.0. Nejprve bylo nutno vytvořit modely satorového svazku. Ty byly vytvořeny v programu Solidworks na základě výkresu plechů použitých pro výrobu jednotlivých svazků. Aby bylo možné simulaci provést na běžném PC, musel být zjednodušen tvar zubu. Modely svazků viditelné na Obr. 6-1 byly následně uloženy ve formátu Parasolid pro snadný import do programu Ansys Workbench. Celkem byly zkoumány 2 modely – holý svazek a svazek s vinutím. Svazek s vinutím byl pro zjednodušení modelován bez čel vinutí.



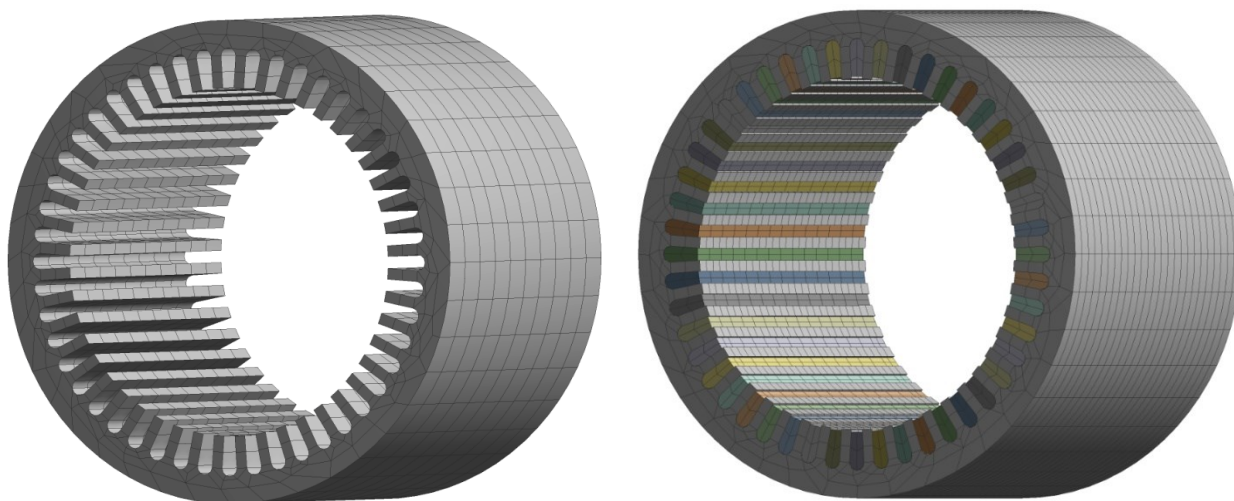
Obr. 6-1- Zjednodušené modely satorových svazků v programu Solidworks

V programu Ansys byl nejprve vytvořen nový projekt a z nabídky byla vybrána možnost „Modal“ – viz Obr. 6-2.



Obr. 6-2 – Schéma projektu v programu Ansys Workbench

Následně byl proveden import modelu ve formátu Parasolid. V položce „Model“ bylo provedeno samotné nastavení simulace. Nejprve bylo nutno provést vytvoření sítě konečných prvků, kde bylo ponecháno výchozí nastavení. Výsledná síť viditelná na Obr. 6-3 má 3210 prvků a 20523 uzlů (10905 a 71995 pro model s vinutím). Při měření byl použit volný způsob uložení svazků. V programu Ansys se tento způsob uložení definuje tak, že se nevytvoří žádné vazby k okolí.



Obr. 6-3 – Modely s vytvořenou sítí

6.1 Modální analýza s uvažováním izotropních materiálových vlastností

Nejprve byla modální analýza v programu Ansys Workbench provedena s uvažováním izotropních materiálových vlastností statorového svazku. Materiálové vlastnosti použité pro výpočet jsou uvedeny v Tab. 6-1. Hustoty obou materiálů byly upraveny tak, aby hmotnost modelu odpovídala reálné situaci s ohledem na činitel plnění železa a činitel plnění drážky.

Tab. 6-1 – Materiálové vlastnosti [6]

Ekv. mat. vlastnost	Statorové jádro	Vinutí
Modul pružnosti E (Pa)	$200 \cdot 10^9$	$9,4 \cdot 10^9$
Poissonova konstanta ν (-)	0,3	0,35
Hustota ρ (kg/m ³)	7500	7670

V Tab. 6-2 jsou uvedeny výsledné vlastní kmitočty holého svazku a svazku s vinutím získané pomocí výpočtu v programu Ansys Workbench s uvažováním izotropních materiálových vlastností.

Z výsledků simulace holého svazku je zřejmé, že zejména u tvarového módu 2,1 se vlastní kmitočty značně liší od hodnot získaných měření. U čistě obvodových módů bylo naopak dosaženo velmi dobré shody s měření. U módů 3,1 a 4,1 nelze shodu posoudit, jelikož tyto módy nebyly měření u holých svazků zachyceny.

Z výsledků simulace svazku s vinutím je jasné, že vůbec nedošlo ke shodě s naměřenými hodnotami. Z toho vyplývá, že holý svazek, a zejména svazek s vinutím nelze modelovat s izotropními materiálovými vlastnostmi.

Tab. 6-2 – *Výsledné vlastní kmitočty s uvažováním izotropních materiálových vlastností*

Řád módu m (-)	Holý svazek	Svazek s vinutím
	f_m (Hz)	f_m (Hz)
0	5664	5076
1	-	-
2,0	570	838
2,1	856	1153
3,0	1516	2226
3,1	1985	2702
4,0	2787	4000
4,1	3300	4505
5,0	4274	6060
5,1	4773	6541

6.2 Modální analýza s uvažováním anizotropních materiálových vlastností

Pro dosažení lepší shody s naměřenými hodnotami byla provedena analýza s použitím anizotropních materiálových vlastností. Cílem bylo provést ladění numerického modelu, tedy zjistit ekvivalentní materiálové vlastnosti statorového jádra a vinutí, při kterých bude dosaženo dobré shody mezi výsledky měření a simulace. Dle práce [1], která se rovněž zabývala problematikou modální analýzy statorového svazku asynchronního stroje, je modul pružnosti statorového svazku bez vinutí v axiálním směru řádově okolo 1 % modulu pružnosti běžné oceli. V uvedené práci byl svazek s anizotropními vlastnostmi modelován v cylindrickém souřadném systému. Stejným způsobem byla simulace s uvažováním anizotropních vlastností provedena i v této práci. Výsledné materiálové vlastnosti, při kterých bylo dosaženo relativně dobré shody s měřením, jsou uvedeny v Tab. 6-4, kde G označuje modul pružnosti ve smyku. Pro vinutí byly zjednodušeně použity izotropní materiálové vlastnosti viditelné v Tab. 6-3. [1]

Tab. 6-3 – *Materiálové vlastnosti vinutí [6]*

Ekv. mat. vlastnost	Svazek s vinutím
E (Pa)	$1 \cdot 10^9$
ν (-)	0,35
ρ (kg/m ³)	7670

Tab. 6-4 – Materiálové vlastnosti statorového jádra

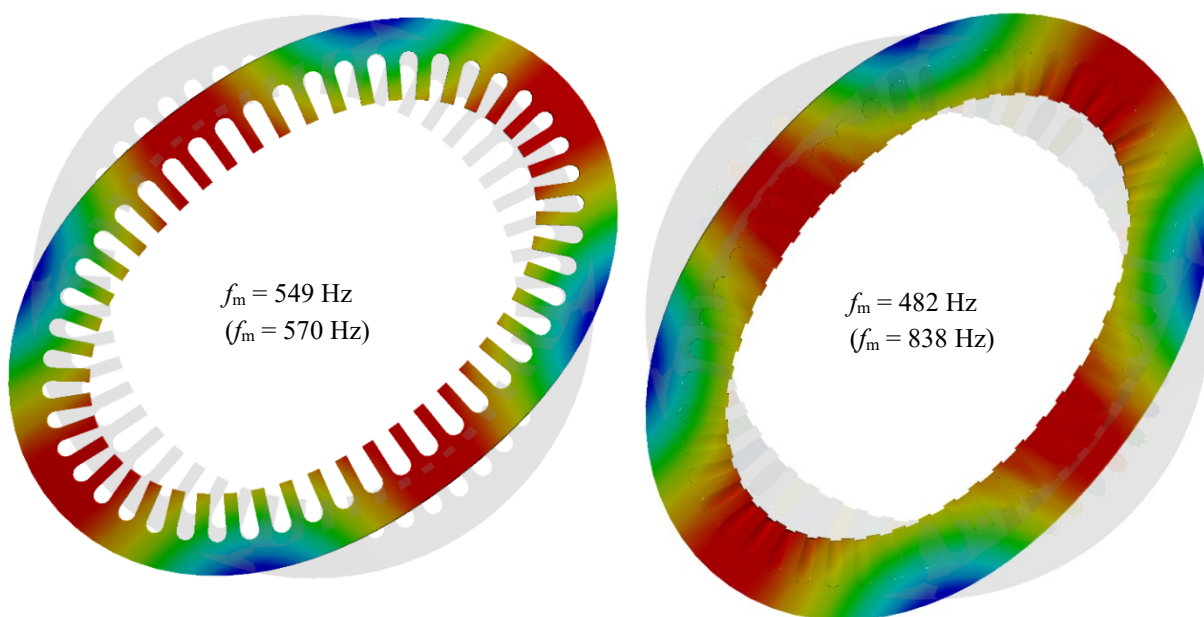
Ekv. mat. vlastnost	Holý svazek	Svazek s vinutím
E_r (Pa)	$2,15 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{11}$
E_φ (Pa)	$2,15 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{11}$
E_z (Pa)	$1 \cdot 10^9$	$1,2 \cdot 10^{11}$
$\nu_{r\varphi}$ (-)	0,3	0,3
$\nu_{\varphi z}$ (-)	0,3	0,3
ν_{rz} (-)	0,3	0,3
$G_{r\varphi}$ (Pa)	$3 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{11}$
$G_{\varphi z}$ (Pa)	$1 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^{10}$
G_{rz} (Pa)	$1 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^{10}$
ρ (kg/m ³)	7500	7500

Tab. 6-5 – Výsledné vlastní kmitočty s uvažováním anizotropních materiálových vlastností

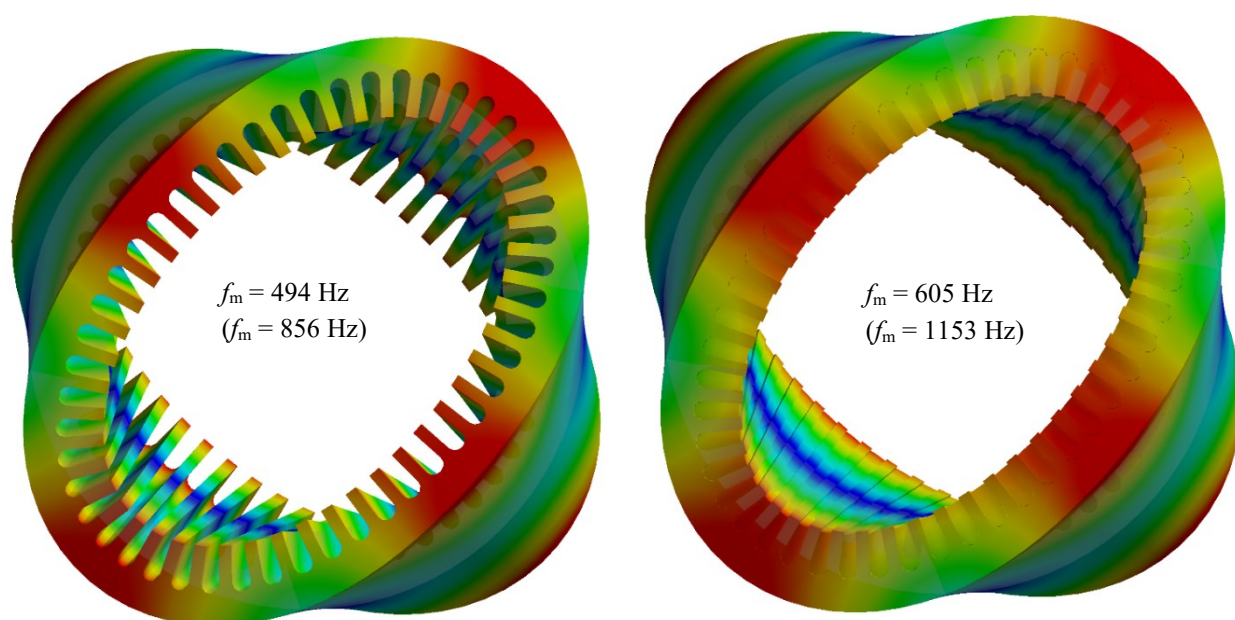
Řád módu m (-)	Holý svazek	Svazek s vinutím
	f_m (Hz)	f_m (Hz)
0	5846	4127
1	-	-
2,0	549	482
2,1	494	605
3,0	1474	1310
3,1	1486	1496
4,0	2658	2410
4,1	2646	2599
5,0	3986	3723
5,1	3925	3889

6.3 Grafické znázornění tvarových módů

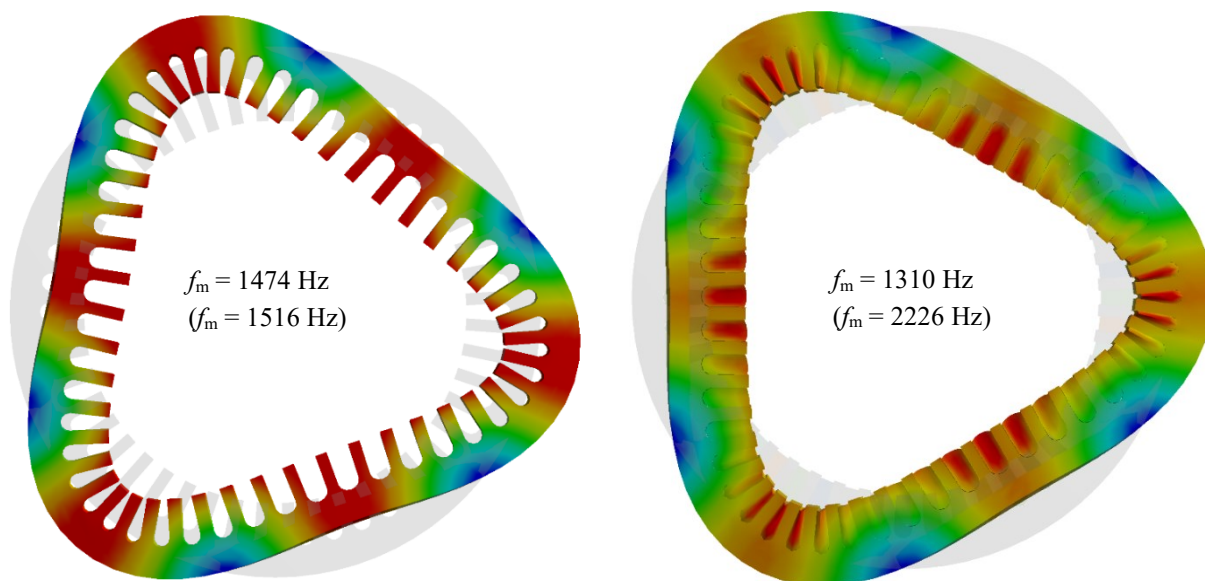
Na Obr. 6-4 až Obr. 6-12 jsou graficky znázorněny tvarové módy zjištěné pomocí modální analýzy v programu Ansys Workbench. U každého módu je uveden příslušný vlastní kmitočet. Kmitočet bez závorek platí pro vyladěný model s anizotropními vlastnostmi a kmitočet v závorkách platí pro model s izotropními vlastnostmi.



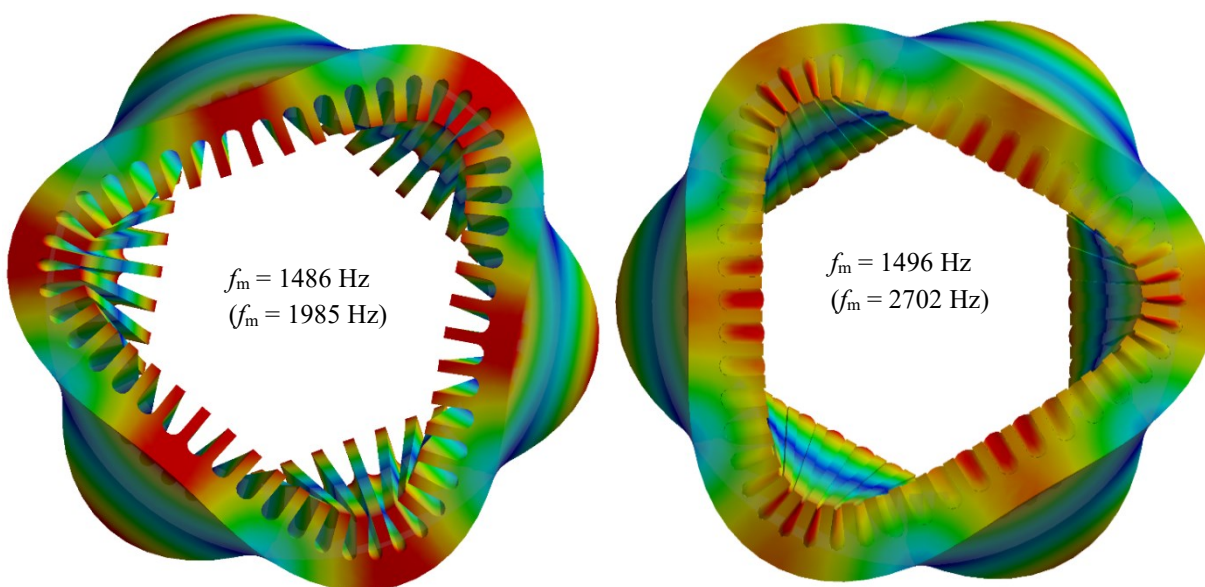
Obr. 6-4 – Tvarový mód řádu $m = 2,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



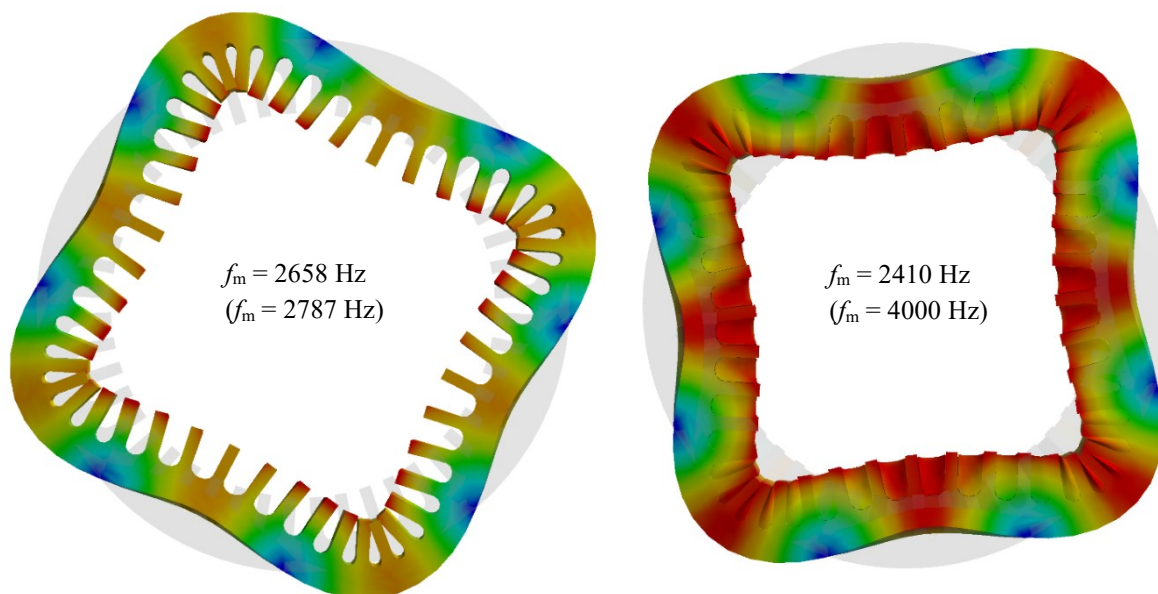
Obr. 6-5 - Tvarový mód řádu $m = 2,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



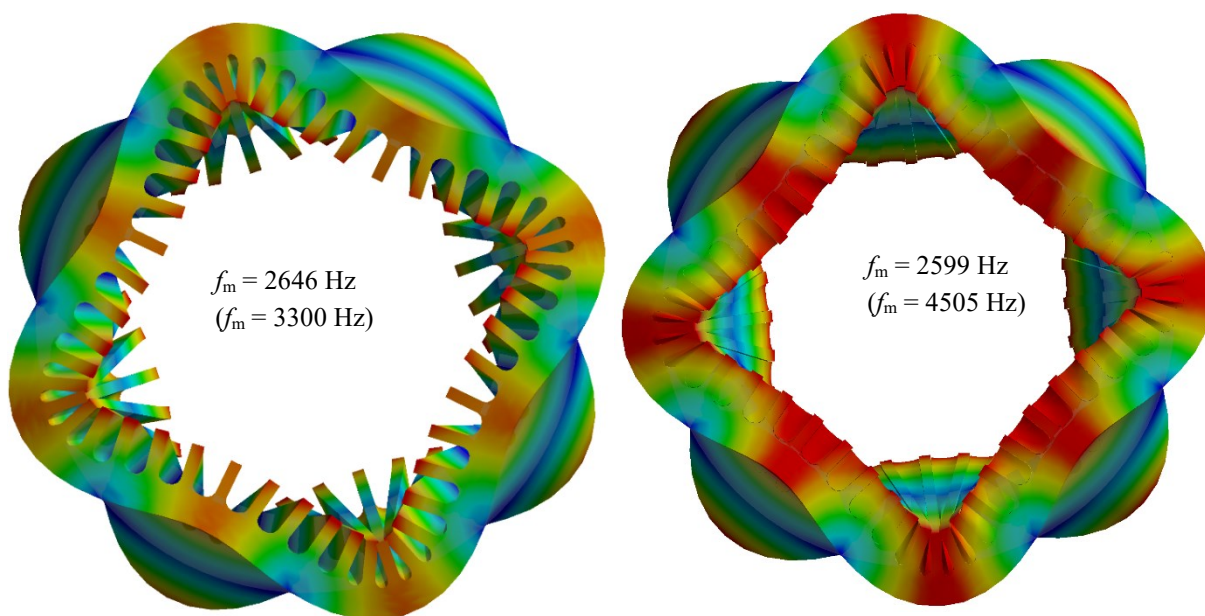
Obr. 6-6 – Tvarový mód řádu $m = 3,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



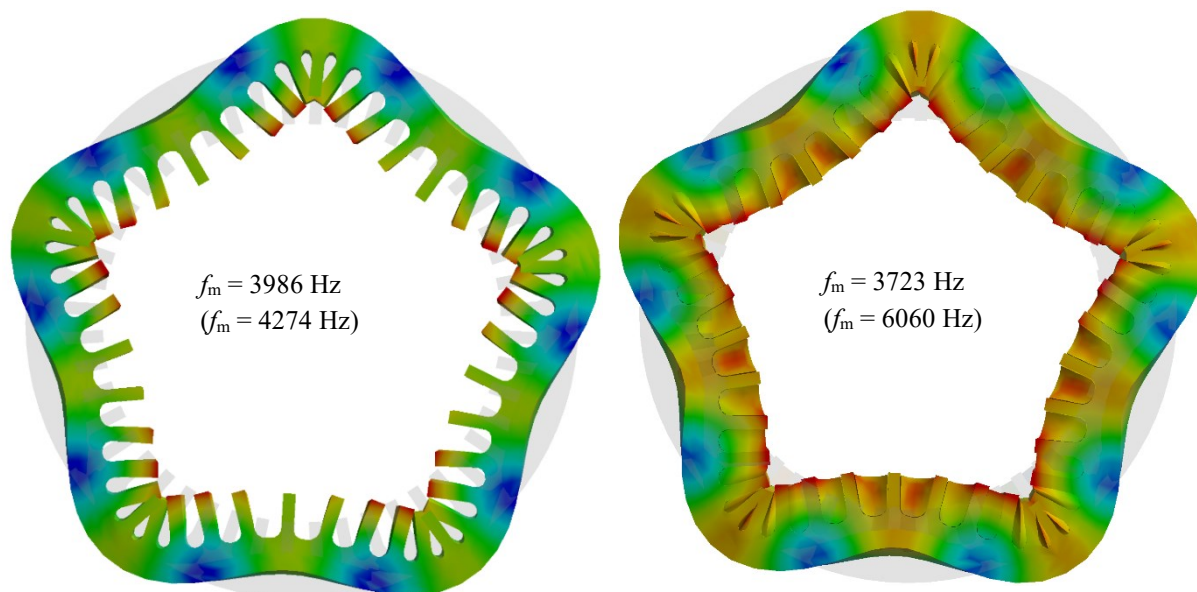
Obr. 6-7 - Tvarový mód řádu $m = 3,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



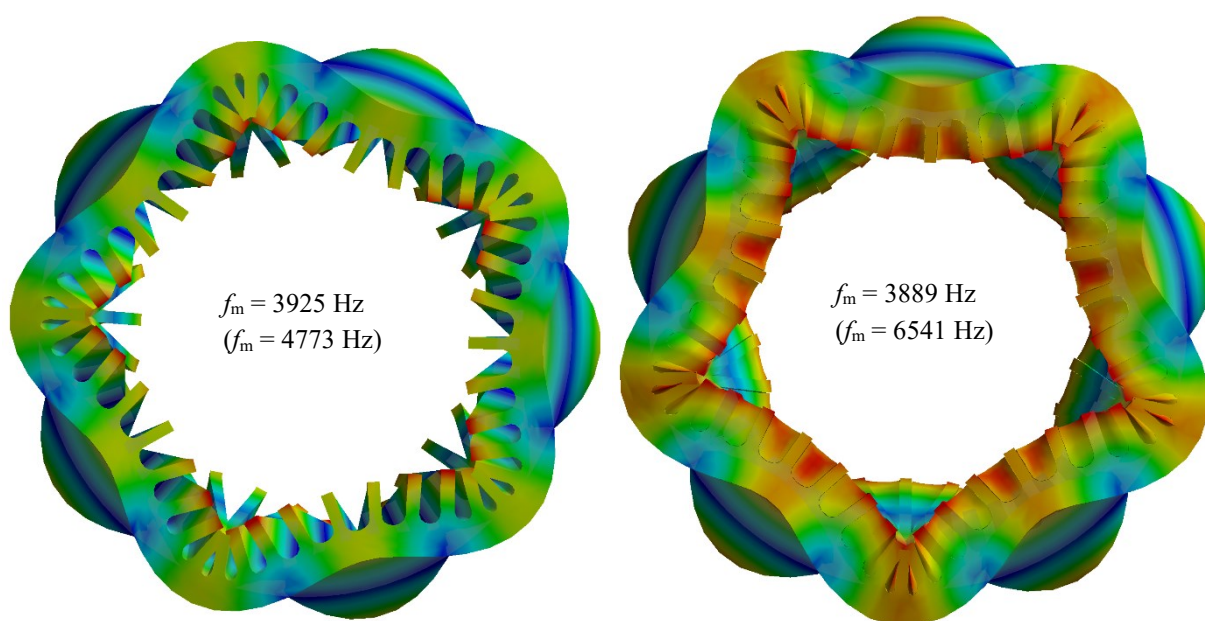
Obr. 6-8 - Tvarový mód řádu $m = 4,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



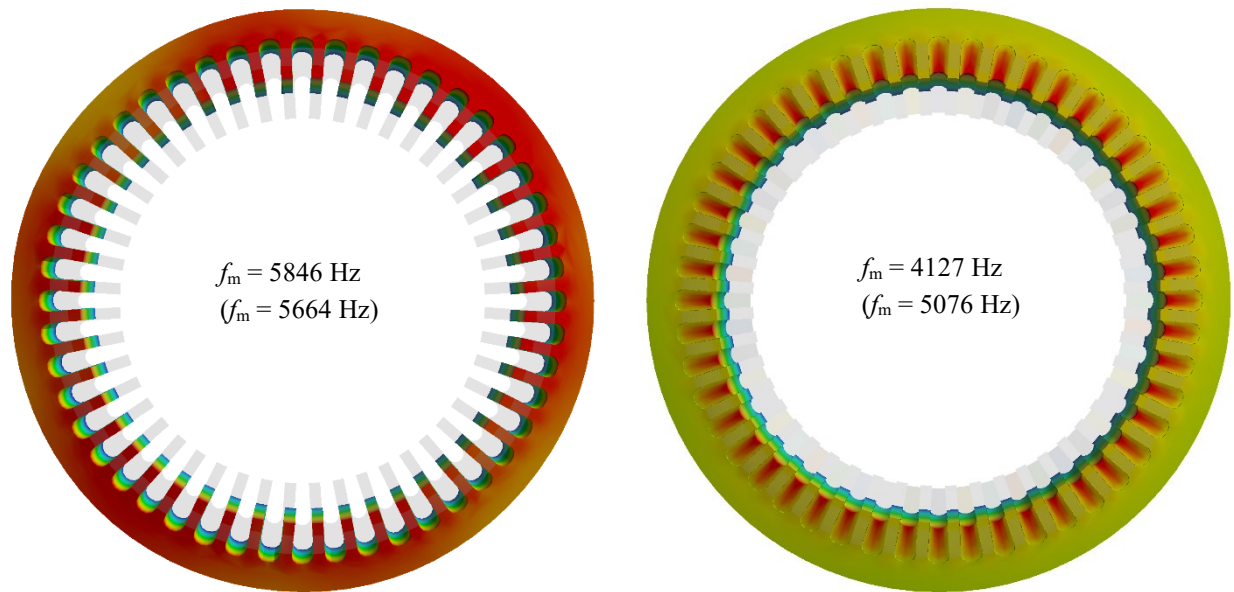
Obr. 6-9 - Tvarový mód řádu $m = 4,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



Obr. 6-10 - Tvarový mód řádu $m = 5,0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek



Obr. 6-11 - Tvarový mód řádu $m = 5,1$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek

Obr. 6-12 - Tvarový mód řádu $m = 0$ pro holý (vlevo) a navinutý (vpravo) svazek

6.4 Výsledky analytického výpočtu

V Tab. 6-6 jsou uvedeny výsledky analytického výpočtu provedeného dle vztahů v podkapitole 2.3.

Tab. 6-6 – Výsledky analytického výpočtu

Řád módu m (-)	Svazek s vinutím
	f_m (Hz)
0	4590
1	99
2,0	499
2,1	-
3,0	1191
3,1	-
4,0	2165
4,1	-
5,0	3419
5,1	-

6.5 Možnost provedení harmonické analýzy pomocí MKP

Po modální analýze, jejímž cílem je zjištění vlastních kmitočtů, často následuje použití harmonické analýzy. Ta se používá jednak pro zpřesnění vlastních kmitočtů získaných modální analýzou a také pro posouzení citlivosti struktury na harmonické budící síly působící v různých směrech. Díky tomu je možné zjistit, které tvarové módy jsou z hlediska hluku, resp. vibrací nejvýznamnější. [15]

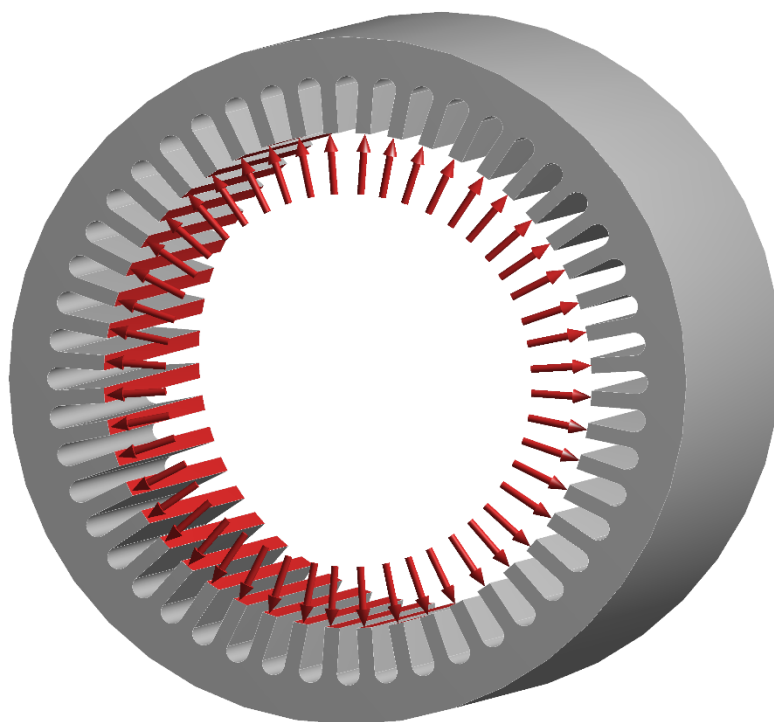
To, jak lze harmonickou analýzu provést v programu Ansys Workbench, bude ukázáno na modelu holého svazku s izotropními vlastnostmi. Předchozí modální analýzou byl zjištěn pro mód řádu $m = 2,0$ vlastní kmitočet 570 Hz. Na tento svazek tedy necháme působit radiální tlak s řádem $r = 2$ s kmitočtem v blízkém okolí vlastního kmitočtu svazku. Tento radiální tlak byl vytvořen tak, že na každý zub byl aplikován tlak v radiálním směru, jak je zřejmé z Obr. 6-13 [16]. Pro připomenutí uvedme rovnici (3-11):

$$p_r(\alpha, t) = P_{mr} \cdot \cos(r \cdot \alpha - \omega_r \cdot t) \quad (6-1)$$

Při řádu $r = 2$ tato rovnice přejde do tvaru:

$$p_2(\alpha, t) = P_{mr=2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha - \omega_r \cdot t) \quad (6-2)$$

Jelikož analyzovaný stroj má 48 statorových drážek, tak úhel α mezi dvěma sousedními zuby je $7,5^\circ$. Dle rovnice (6-2) je zřejmé, že mezi tlaky působícími na 2 sousední zuby musí být fázový posuv 15° . Způsob definování jednotlivých tlaků je naznačen v Tab. 6-7.



Obr. 6-13 – Vytvoření radiálního tlaku s řádem $r = 2$

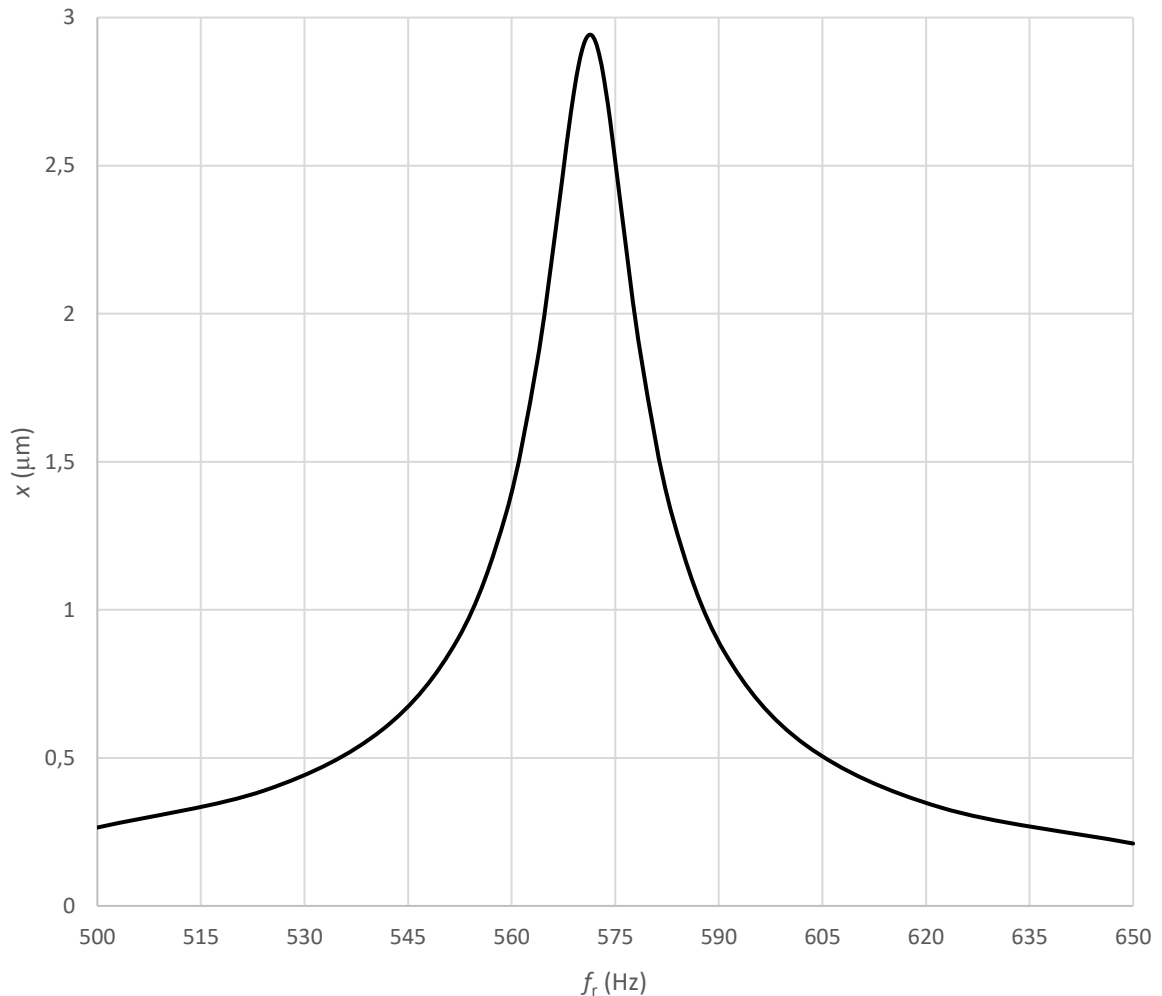
Jelikož cílem bylo pouze ukázat, jakým způsobem lze harmonickou analýzu provést, tak byla pro amplitudu tlaku zvolena hodnota 500 Pa a pro tlumení hodnota 0,01. V praxi lze správnou hodnotu

činitele tlumení zjistit z frekvenčních odezvových funkcí získaných pomocí experimentální modální analýzy [10], případně u svazku s vinutím orientačně podle vztahu (2-2). Amplitudy jednotlivých sil, resp. tlaků je možné zjistit na základě rozložení magnetické indukce podél vzduchové mezery.

Tab. 6-7 – Definování radiálního tlaku řádu $r = 2$

Zub	α (°)	$r \cdot \alpha$ (°)	Časový průběh tlaku v radiálním směru
1	0	0	$500 \cdot \cos(0^\circ - \omega_r \cdot t)$
2	7,5	15	$500 \cdot \cos(15^\circ - \omega_r \cdot t)$
3	15	30	$500 \cdot \cos(30^\circ - \omega_r \cdot t)$
.....			

Výsledný tvar deformace odpovídá tvarovému módu s řádem $m = 2,0$ dle Obr. 6-4. Na Obr. 6-14 je znázorněna amplituda kmitů statorového svazku v závislosti na frekvenci budící síly s řádem $r = 2$.



Obr. 6-14 – Odezva svazku na budící sílu s řádem $r = 2$

7. Vyhodnocení výsledků

V Tab. 7-1 jsou srovnány výsledky vlastních kmitočtů získané měřením, simulací a analytickým výpočtem.

7.1 Zhodnocení výsledků měření

Při srovnání dat získaných měřením překládaného a nepřekládaného svazku bez vinutí lze říci, že rozdíly v jednotlivých vlastních kmitočtech prakticky neexistují. Znatelné rozdíly se ovšem vyskytují v amplitudách odezvy. Dále měřením nedošlo k odhalení módů 3,1; 4,1 a u překládaného svazku ani módu 5,1. Vlastní kmitočty těchto módů nejspíše leží velmi blízko čistě obvodových módů, čímž mohlo dojít k jejich splynutí ve výsledných FRF. To by odpovídalo i výsledkům získaným simulací svazku bez vinutí s anizotropními parametry, kde rovněž vlastní kmitočty zmiňovaných módů ležely velmi blízko čistě obvodovým módům. K tomu došlo i u měření nepřekládaného svazku u módů 5,0 a 5,1 (4100 a 4111 Hz).

Při pohledu na Obr. 5-11, kde jsou srovnány všechny frekvenční odezвовé funkce, je na první pohled zřejmý obrovský rozdíl v amplitudách rezonanční odezvy mezi svazky s vinutím a svazky bez vinutí. Tím se potvrdil předpoklad, že vinutí obecně zvyšuje tlumení statorového systému, což má za následek snížení amplitudy kmitů při rezonanci. Dále se potvrzuje předpoklad, že u svazků s impregnovaným vinutím při rostoucím kmitočtu roste i tlumení (vztah (2-2)) – u módu 2,0 je patrná velká amplituda a malá šířka rezonančního pásma (to odpovídá malému tlumení) a u módů vyššího řádu je patrná nižší amplituda a větší šířka pásma (to odpovídá většímu tlumení). U svazku s vinutím bez impregnace je tlumení velmi vysoké – pravděpodobně kvůli tomu, že mezi statorovým jádrem a vinutím není vytvořena pevná vazba a tyto dvě části se tak mohou vůči sobě částečně pohybovat, čímž dochází ke tření.

Dále je možné vidět, že u impregnovaných navinutých svazků jsou obecně vlastní kmitočty čistě obvodových módů nižší, než u svazků bez vinutí (s výjimkou módu 3,0). Z toho lze usoudit, že zvýšení hmotnosti svazku po navinutí má výraznější vliv než zvýšení jeho tuhosti v radiálním směru. Ovšem v axiálním směru došlo po navinutí a impregnaci k výraznému zvýšení tuhosti, proto došlo ve výsledných frekvenčních odezвовých funkcích k viditelnému oddělení čistě obvodových módů (3,0; 4,0; 5,0) od módů 3,1; 4,1 a 5,1.

Pokud mezi sebou srovnáme naměřené hodnoty pro jednu impregnovaný a dvakrát impregnovaný svazek, tak je zřejmé, že dvojitou impregnací došlo ke zvýšení vlastních kmitočtů všech tvarových módů. Obecně lze říci, že vlastní kmitočet stoupá s rostoucí tuhostí a klesá s rostoucí hmotností. Po dvojitou impregnaci dojde k určitému zvýšení hmotnosti svazku, ovšem zároveň dojde i ke zvýšení tuhosti svazku. Tuhost svazku byla pravděpodobně ovlivněna více než hmotnost, proto došlo k posunu vlastních kmitočtů směrem k vyšším hodnotám. Zvýšení vlastních kmitočtů ovšem není nijak výrazné (s výjimkou módu 3,0 a 3,1) – jedná se řádově o jednotky až desítky Hz. Vzhledem k tomu,

že rezonanční pásma mají u těchto svazků poměrně velkou šířku (v důsledku většího tlumení než například u svazků bez vinutí), tak tento posun vlastních kmitočtů nemá až tak velký význam, jak se původně očekávalo. Další věcí, které si lze při porovnání těchto dvou svazků povšimnout je, že u dvakrát impregnovaného svazku došlo ke zvýšení amplitudy rezonanční odezvy u módů 4,0; 4,1 a 5,0 oproti jednou impregnovanému svazku. To je velmi nežádoucí, jelikož u dvakrát impregnovaného svazku by měla rezonance na těchto kmitočtech horší projevy. Toto je ale nutno brát s rezervou, jelikož tento rozdíl v amplitudách mohl být způsoben i vzájemnou polohou uzlových bodů příslušného módu vůči referenčnímu bodu, ve kterém byl prováděn úder kladívkem. Pokud bude referenční bod blízko uzlovému bodu módu, tak bude odezva módu velmi malá. Pokud bude referenční bod ve stejném místě, jako uzlový bod příslušného módu, tak úderem nedojde k vybuzení tohoto módu. To je také nejspíše důvod, proč nebyl odhalen například mód 5,1 u jednou impregnovaného svazku.

7.2 Zhodnocení výsledků simulace a analytického výpočtu

Po měření byla modální analýza provedena pomocí metody konečných prvků v programu Ansys Workbench. Potvrdil se předpoklad, že správné provedení simulace struktury složené z různých materiálů s anizotropními materiálovými vlastnostmi je nelehký úkol, při kterém nelze zohlednit všechny reálné vlivy, a je potřeba zavést určitá zjednodušení. Zejména problematické je pak modelování vinutí. Analýza s využitím MKP byla provedena pro svazek bez vinutí a svazek s vinutím, a to s uvažováním nejprve izotropních a následně anizotropních materiálových vlastností.

U svazku bez vinutí s uvažováním izotropních vlastností běžné oceli bylo dosaženo velmi dobré shody s naměřenými hodnotami u čistě obvodových módů 2,0; 3,0; 4,0 a 5,0. Ovšem u módů 2,1 a 5,1 (3,1 a 4,1 nebyly měřením zachyceny) došlo k výrazné neshodě. To je způsobeno tím, že bylo uvažováno s izotropními vlastnostmi – tedy modul pružnosti v axiálním směru byl rovněž 200 GPa. Jak ale ukazují výsledky práce [1], tak modul pružnosti reálného svazku bez vinutí v axiálním směru se pohybuje řádově okolo 1 % modulu pružnosti běžné oceli, což je způsobeno tím, že svazek je skládaný ze vzájemně izolovaných plechů. Právě tento izolační lak výrazně snižuje modul pružnosti svazku v axiálním směru. V důsledku toho má reálný svazek v axiálním směru mnohem nižší tuhost, což způsobí pokles vlastních kmitočtů u těch módů, u kterých dochází k deformaci i v axiálním směru, tedy právě u módů 2,1; 3,1 atd. Jelikož u čistě obvodových módů nedochází k deformaci v axiálním směru, tak u těchto módů se výsledky velmi dobře shodují s naměřenými hodnotami i s uvažováním izotropních vlastností.

V další fázi byla simulace svazku bez vinutí provedena s uvažováním anizotropních vlastností, kde cílem bylo provést naladění numerického modelu. Zde bylo uvažováno s výrazně nižším modulem pružnosti v axiálním směru, jak lze vidět v Tab. 6-4. S těmito materiálovými vlastnostmi bylo dosaženo velmi dobré shody s výsledky získanými měřením. Oproti předchozí simulaci došlo podle očekávání ke snížení vlastních kmitočtů u módů 2,1; 3,1 atd. v důsledku snížené tuhosti v axiálním směru.

Simulace svazku s vinutím byla opět rozdělena na 2 části. U statorového jádra bylo v první části uvažováno s izotropními vlastnostmi běžné oceli. U vinutí byly uvažovány rovněž izotropní vlastnosti převzaté z [6]. Z výsledků simulace je zřejmé, že vůbec nedošlo ke shodě s naměřenými hodnotami.

Konkrétně došlo k výraznému zvýšení jednotlivých vlastních kmitočtů, což znamená, že tuhost svazku v této simulaci byla mnohem vyšší, než v reálné situaci. To může být způsobeno tím, že v reálném svazku je vinutí od statorového jádra odděleno izolačním materiálem. Právě modul pružnosti této izolační vrstvy je mnohem nižší, než u samotného vinutí [6], což je nutno do simulace zahrnout snížením modulu pružnosti vinutí a jádra. V důsledku toho budou mít ekvivalentní hodnoty modulů pružnosti nižší hodnoty, než by odpovídalo skutečnosti. Bylo by samozřejmě možné vytvořit model s vinutím tak, že by mezi vinutím a jádrem byla vytvořena tenká vrstva izolace s malým modulem pružnosti. V takovém případě by výsledné ekvivalentní materiálové vlastnosti vinutí a jádra lépe odpovídaly skutečnosti. Avšak tímto řešením by výrazně narostl počet elementů, čímž by se simulace na běžném počítači stala jen těžko proveditelná. Proto od tohoto řešení bylo ustoupeno a byl vytvořen zjednodušený model, jak lze vidět na Obr. 6-1. Výsledné materiálové vlastnosti, se kterými bylo dosaženo relativně dobré shody s naměřenými hodnotami (s výjimkou módů 3,0 a 3,1) jsou uvedeny v Tab. 6-3 a Tab. 6-4. Rovněž si lze povšimnout, že vinutí výrazně zvýšilo tuhost svazku v axiálním směru, čemuž odpovídají i naměřené hodnoty – například u nepřekládaného svazku bez vinutí byl mód 2,1 identifikován při nižší frekvenci, než mód 2,0, zatímco u jednou i dvakrát impregnovaného svazku s vinutím byl mód 2,1 nalezen při vyšším kmitočtu, než mód 2,0.

Pokud mezi sebou srovnáme naměřené hodnoty pro impregnované svazky a hodnoty získané analytickým výpočtem, tak je zřejmé, že zejména u módu 3,0 vznikl značně velký rozdíl. Také v případě ostatních módů jsou rozdíly poměrně velké, z čehož vyplývá, že na analytický výpočet se nelze spoléhat a je možné ho použít pouze pro hrubý odhad vlastních kmitočtů.

Tab. 7-1 – Srovnání získaných výsledků

Metoda	Svazek		Řád módu m (-)									
			0	1	2,0	2,1	3,0	3,1	4,0	4,1	5,0	5,1
Měření	Svazek 1	f_m (Hz)	-	-	548	484	1460	-	2698	-	4100	4111
	Svazek 2	f_m (Hz)	-	-	543	478	1460	-	2692	-	4103	-
	Svazek 3	f_m (Hz)	-	-	-	473	1539	-	2739	-	4129	-
	Svazek 4	f_m (Hz)	-	-	476	527	1522	1944	2450	2725	3670	-
	Svazek 5	f_m (Hz)	-	-	483	553	1661	2077	2518	2843	3698	3888
Simulace s izotropními vlastnostmi	Holý svazek	f_m (Hz)	5664	-	570	856	1516	1985	2787	3300	4274	4773
	Svazek s vinutím	f_m (Hz)	5076	-	838	1153	2226	2702	4000	4505	6060	6541
Simulace s anizotropními vlastnostmi	Holý svazek	f_m (Hz)	5846	-	549	494	1474	1486	2658	2646	3986	3925
	Svazek s vinutím	f_m (Hz)	4127	-	482	605	1310	1496	2410	2599	3723	3889
Analytický výpočet	Svazek s vinutím	f_m (Hz)	4590	99	499	-	1191	-	2165	-	3419	-

Závěr

Tato diplomová práce se zabývala problematikou rezonančních kmitočtů a tvarových módů statorových svazků asynchronního stroje. Cílem teoretické části práce bylo provést popis problematiky kmitání, rezonance a budících sil u asynchronních strojů.

Hlavní náplní této diplomové práce bylo měření dynamických vlastností statorového svazku asynchronního motoru, čímž se rozumí nalezení hodnot vlastních kmitočtů a tomu odpovídajících tvarových módů. Toto měření bylo provedeno celkem na 5 statorových svazcích. Konkrétně se jednalo o 2 svazky bez vinutí a 3 svazky s vinutím, kdy jeden byl bez impregnace, další jednou impregnovaný a poslední dvakrát impregnovaný. Souhrnné vyhodnocení získaných výsledků je uvedeno v předchozí kapitole.

V návaznosti na experimentální modální analýzu byla posléze provedena i modální analýza s využitím metody konečných prvků v programu Ansys Workbench s hlavním cílem získání náhradních materiálových vlastností, u kterých by došlo ke shodě s naměřenými výsledky.

Hlavním přínosem této diplomové práce je zjištění rozdílů ve vlastních kmitočtech jednotlivých tvarových módů mezi jednou a dvakrát impregnovaným statorovým svazkem s vinutím. Ve stručnosti lze shrnout, že po dvojité impregnaci došlo ke zvýšení vlastních kmitočtů. U některých módů jsou rozdíly výraznější, u jiných jsou pak nepatrné. Je ovšem možné, že u svazku s jinými rozměry a s jiným činitelem plnění drážky by dvojitá impregnace měla výraznější vliv než v tomto případě.

Dalším přínosem práce je získání numerického modelu statorového svazku bez vinutí, kde se podařilo dosáhnout velmi dobré shody s naměřenými výsledky. Model by například šlo použít pro harmonickou analýzu v programu Ansys Workbench, při které je cílem zjistit odezvu modelu na konkrétní budící síly s určitou amplitudou, frekvencí a vzájemným fázovým posuvem, jak bylo naznačeno v závěru kapitoly 6. U simulace svazku s vinutím bylo dosaženo poměrně dobré shody s výjimkou módů 3,0 a 3,1. Je možné, že tato odchylka byla způsobena různými zjednodušeními při vytváření modelu, zejména pak tím, že svazek byl modelován bez čel vinutí.

Z pohledu dalšího vývoje by se na téma této práce dalo navázat například zkoumáním vlivu kostry na jednotlivé vlastní kmitočty, jelikož kostra stroje ovlivňuje jednak hmotnost i tuhost a tím i vlastní kmitočty. Stejně tak by se dal zkoumat vliv ložiskových štítů atd. Další možností by bylo zjistit, jak ovlivní dvojitá impregnace vlastní kmitočty u jiných svazků s jiným činitelem plnění drážky. Rovněž by se dalo podrobněji zabývat problematikou harmonické analýzy u asynchronních strojů, jak bylo ukázáno v poslední části kapitoly 6.

Seznam použité literatury

- [1] BOUZEK, Lukáš. *Elektromagnetické pole, síly, chvění a hluk v elektrických strojích* [online]. Plzeň, 2014 [cit. 2019-03-03]. Dostupné z: <https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/20660/1/Dizertace%20final.pdf>. Disertační práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická.
- [2] ONDROUCH, Jan a Jiří PODEŠVA. *Aplikovaný mechanik jako součást týmů konstruktérů a vývojářů: Technické kmitání* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012 [cit. 2018-03-22]. ISBN 978-80-248-2762-9. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2762-9.pdf>
- [3] BOTTEGA, William J. *Engineering vibrations*. Boca Raton: CRC Press, 2006. ISBN 978-0849334207.
- [4] DØSSING, Ole. BRÜEL & KJÆR. Zkoušení konstrukcí: Část II: Analýza vidů kmitání a modelování [firemní materiál]. Nærum (Dánsko), 1989, 70 s. [cit. 2019-02-28].
- [5] Co to je modální analýza. *Ekosoftware* [online]. [cit. 2019-03-03]. Dostupné z: <https://www.ekosoftware.cz/co-to-je-modalni-analyza>
- [6] GIERAS, Jacek F, Joseph Cho LAI a Chong WANG. *Noise of polyphase electric motors*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. ISBN 978-082-4723-811.
- [7] MALITI, Kelvin C. *Modelling and analysis of magnetic noise in squirrel - cage induction motors* [online]. Stockholm, 2000 [cit. 2019-03-03]. Dostupné z: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:8723/FULLTEXT01.pdf>. Disertační práce. Royal institute of technology, Department of electric power engineering.
- [8] HELLER, Bedřich a Václav HAMATA. *Přídavná pole, síly a ztráty v asynchronním stroji*. Praha: Československá akademie věd, 1961.
- [9] PETROV, G. N. *Elektrické stroje 2*. Praha: Academia, 1982, 732 s.
- [10] BILOŠOVÁ, Alena. *Aplikovaný mechanik jako součást týmu konstruktérů a vývojářů: část Modální zkoušky* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2012 [cit. 2018-11-07]. ISBN 978-80-248-2758-2. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2758-2.pdf>
- [11] BILOŠOVÁ, Alena. Týmová cvičení předmětu Experimentální modální analýza: návody do cvičení předmětu "Experimentální modální analýza" [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2011 [cit. 2019-03-03]. ISBN 978-80-248-2756-8. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2756-8.pdf>

- [12] BILOŠ, Jan a Alena BILOŠOVÁ. *Aplikovaný mechanik jako součást týmů konstruktérů a vývojářů: část Vibrační diagnostika* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2012 [cit. 2019-02-28]. ISBN 978-80-248-2755-1. Dostupné z: <http://projekty.fs.vsb.cz/147/ucebniopory/978-80-248-2755-1.pdf>
- [13] Shop sensors. *PCB Piezotronics, Inc. [US]* [online]. [cit. 2019-02-28]. Dostupné z: <http://www.pcb.com/ShopSensors>
- [14] Apollo light. *Sinus - SOUND & VIBRATION MEASUREMENT SYSTEMS* [online]. [cit. 2019-03-03]. Dostupné z: <https://sinus-leipzig.de/en/produkte/messsysteme/apollo-light>
- [15] WEISZ, Michal. *Měření a numerické modelování hluku a vibrací železničního kola*. Ostrava, 2014. Disertační práce. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní.
- [16] ROIVAINEN, Janne. *Unit-wave response-based modeling of electromechanical noise and vibration of electrical machines* [online]. Helsinki, 2009 [cit. 2019-03-11]. Dostupné z: <http://lib.tkk.fi/Diss/2009/isbn9789512299119/isbn9789512299119.pdf>. Disertační práce. Helsinki University of Technology.